

# Caracteritzant els codis de Gauss: només cal girar la cantonada

LLUÍS VENA

**Resum:** Aquest document està dedicat a la història, les motivacions i algunes solucions al *problema dels codis de Gauss*.

Una corba tancada al pla pot contenir punts d'autointersecció; en suposem un nombre finit, suposem els talls no tangencials i suposem que la corba recorre cada punt del pla un màxim de dos cops. Si etiquetem els punts de tall amb símbols diferents, triem un punt a la corba, un sentit,  $i$ , en recórrer la corba, anotem la seqüència de símbols que anem trobant, aleshores generem una paraula que s'anomena genèricament *codi de Gauss*.

El problema dels codis de Gauss és el de caracteritzar quines són les possibles paraules generades per corbes al pla. Com veurem, les solucions al problema demanen girar la cantonada.

**Paraules clau:** codis de Gauss, paràgraf de Gauss, caracterització alternativa, cercles de Seifert.

**Classificació MSC2010:** primària: 05C10; secundària: 57M15, 57M25.

## 1 Introducció

### 1.1 Una mica d'història i presentació del problema

Després de la mort de Gauss l'any 1855, i degut a la importància dels seus descobriments, es va decidir de preservar el seu llegat. En l'apartat matematico-literari aquest constava d'una substancial biblioteca i manuscrits variats. Després de catalogar-la, la seva biblioteca personal es va integrar en la de la universitat —amb l'excepció d'aquells volums que contenien nombroses anotacions, que es van classificar com a manuscrits. També es va decidir publicar les seves obres completes; això incloïa tant els treballs ja publicats (el primer volum de les obres completes està dedicat al *Disquisitiones arithmeticae*), com d'altres manuscrits, notes, cartes, fulls solts i quaderns que Gauss havia escrit. La tasca d'editar les obres completes va recaure en Ernst Schering, professor de la Universitat de Göttingen i deixeble de Gauss [7].

Schering era un matemàtic versàtil amb coneixements en diferents àrees de les matemàtiques. Això li va permetre d'editar, fins a la seva mort l'any 1897, sis volums dels treballs complets de Gauss que van ser publicats entre els anys 1863 i 1874 [9, 10, 11, 12, 13, 14]. La resta de volums, fins a completar la dotzena [15, 16, 17, 18, 19, 20], van ser editats per Fricke (anàlisi), Stäckel (geometria), Borsch i Kruger (material geodèsic), Wiechert (física matemàtica), Galle i Geppert, entre d'altres. Brendel, Schlesinger i Klein van prendre el rol d'editors generals per coordinar la tasca en aquesta segona etapa després de la mort de Schering.

Deixant de banda les dificultats inherents a l'edició de treballs no sempre completament finalitzats, en el cas de Gauss s'hi han d'afegir: la manca de dates a molts manuscrits, la gran varietat de formats (llibretes, quaderns, papers solts, anotacions profuses a llibres), així com la diferència en la presentació: tot i que alguns dels manuscrits estan escrits amb lletra clara, d'altres costen més d'entendre i desxifrar.

Després de diverses vicissituds (mort de Schering el 1897, Brendel fou dos anys presoner de guerra a França durant la Primera Guerra Mundial, mort de Klein l'any 1925), els treballs complets de Gauss, dotze volums en total, amb alguns d'ells publicats en diverses parts, es van acabar de publicar l'any 1933. Cal fer notar que la numeració dels volums i les parts no segueix estrictament un ordre cronològic, una dada que indica les dificultats de la tasca.

**Nachlass: Zur Geometria Situs.** En el volum VIII de les obres completes [16], entre les pàgines 271 i 286, apareixen, agrupades sota el títol genèric de *Geometria Situs*, dues parts dedicades al que avui anomenem *teoria de nusos*. Aquestes parts, que van ser editades per Stäckel, duen per subtítols: [I.] *Zur Geometria Situs* i [II.] *Zur Geometrie der Lage, für zwei raumdimensionen*. La primera part consta de diverses notes trobades en un quadern i presumiblement escrites entre els anys 1822 i 1840 (no estan datades); la segona part va ser escrita l'any 1844.

En la primera part, [I.] *Zur Geometria Situs*, es consideren diverses maneres de descriure la representació plana d'un nus o d'una corba tancada al pla i s'hi tracta el nombre de rotació de les diferents regions en què la corba subdivideix el pla, així com maneres de calcular-lo usant la informació que ens proporcionen la corba i els seus punts d'autointersecció.<sup>1</sup> A la segona nota de la part I hi ha una referència al peu de pàgina on es menciona el problema tractat a la part II i que està datada el 30 de desembre del 1844.

En la segona part, la titulada [II.] *Zur Geometrie der Lage, für zwei raumdimensionen*, Gauss introdueix el problema al qual dediquem la resta de l'article i que queda especificat en la qüestió 1 d'aquest treball. Les qüestions 2 i 3 són reformulacions alternatives del problema.

---

<sup>1</sup> El nombre de rotació d'un punt del pla respecte d'una corba tancada és el nombre de cops que la corba encercla el punt.

**El problema dels codis de Gauss.** Sigui  $\gamma$  una corba tancada, al pla, amb un nombre finit de punts d'autointersecció; usarem  $n$  per denotar aquest nombre. En aquests punts la corba es talla de manera no tangencial. Assignem, a cada punt d'intersecció, un símbol d'entre  $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$  de manera injectiva (cada punt d'intersecció rep un únic símbol), i seleccionem un punt de la corba  $\gamma$  i un sentit per recorre-la. Recorrem la  $\gamma$  i anotem els símbols dels diferents punts d'intersecció que trobem. Això genera una paraula de  $2n$  lletres en  $n$  símbols (vegeu la figura 1 com a exemple). De manera més general, podem tenir un conjunt de corbes tancades al pla formant un total de  $n$  punts de tall; en aquest cas cada corba genera una paraula de, possiblement, diferent llargada, i el conjunt de corbes genera un paràgraf on cada símbol apareix un total de dues vegades ( $2n$  lletres entre totes les paraules i  $n$  símbols en total). Suposarem que no hi ha corbes isolades i, per tant, no hi ha cap subconjunt estricte de paraules amb aquestes propietats. Més formalment,

**DEFINICIÓ 1 (CODI DE GAUSS, PARÀGRAF DE GAUSS).** Un *paràgraf de Gauss*  $\omega$  de mida  $n$  està format per un conjunt de  $2n$  lletres  $L = \{l_1, \dots, l_{2n}\}$ , un conjunt de  $n$  símbols  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , una aplicació dos-a-u  $J: L \rightarrow S$  que determina quin parell de lletres correspon a cada símbol, i una aplicació bijectiva  $N: L \rightarrow L$  que determina la lletra següent a  $\omega$ .

Cada òrbita de  $N$  és una *paraula*. També demanem que cap subconjunt de paraules sigui un paràgraf de Gauss per si mateix. En el cas de tenir una única paraula usem el terme *codi de Gauss*.

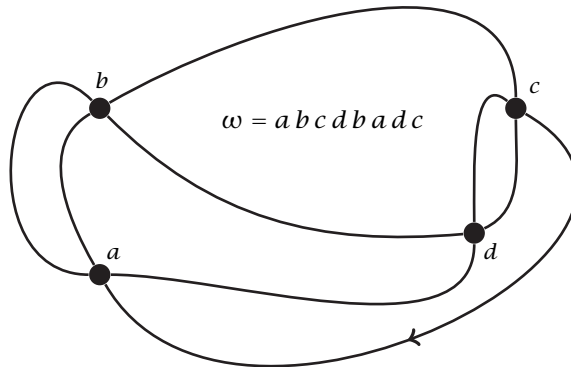


FIGURA 1: Corba representable al pla. El punt inicial està representat per una fletxa que, alhora, n'indica el sentit de recorregut.

Dues paraules donen lloc al mateix codi de Gauss si hi ha una bijecció entre els símbols tal que els dos conjunts de lletres tinguin el mateix ordre cíclic. El problema dels codis de Gauss és el següent:

**QÜESTIÓ 1 (PROBLEMA DELS CODIS DE GAUSS).** *Quines condicions ha de complir una paraula  $\omega$  de  $2n$  lletres, on cada lletra apareix exactament dos cops (codi de Gauss), per tal que existeixi una corba tancada  $\gamma$ , al pla, que la representi?*

**Condicció de Gauss.** Després de presentar el problema de quines paraules de  $2n$  lletres en  $n$  símbols, on cada símbol apareix 2 cops, són representables per corbes al pla (qüestió 1 en aquest treball), Gauss estableix una condició necessària:

PROPOSICIÓ 2 (CONDICIÓ DE GAUSS). *Si un codi de Gauss no signat és representable al pla, aleshores*

*entre qualsevol parella de lletres del mateix símbol  
hi ha un nombre parell de lletres.*

Aquesta condició és bastant natural: una repetició de símbols significa que podem trobar una subcorba tancada que defineix una regió tancada. Sempre que «entrem» a la regió n'hem de «sortir». Tant si entrem a la regió com si en sortim tallarem la corba, per això el nombre de talls és parell.<sup>2</sup> Posteriorment fa una llista de totes les paraules de 8 lletres o menys (4 símbols diferents, 8 lletres en total) [16, p. 282–283] i veu com aquesta condició, en aquest cas, també és suficient. Després examina totes les paraules de fins a 5 parells de símbols i conclou que la condició no és suficient en aquests casos. Troba que les paraules *abcdcedbe* i *abcdbecde* compleixen la condició de la proposició 2, però amb una simple comprovació manual podem veure que no tenen representació al pla. Així, *abcdcedbe* i *abcdbecde* són les paraules de menys símbols en les que la condició de Gauss no és suficient.<sup>3</sup>

## 1.2 Solucions parcials, caracteritzacions i generalitzacions

Nagy [28] va donar una condició necessària més general que la condició de Gauss l'any 1927, tot i que no era suficient. No va ser fins l'any 1936 que Dehn dona la caracterització que veurem més endavant a la secció 4, i que Read i Rosenstiehl [29] van completar fins a la forma que presentem en la mencionada secció com a teorema 8. Altres autors han donat caracteritzacions en termes de subestructures prohibides [26], o d'altres variacions i refinaments a la que presentem a la secció 4 com ara [4, 30, 31, 32, 1, 2]. En aquest treball donem una caracterització diferent, de caire més algorítmic, en forma de teorema 16 a la secció 5 i que es pot trobar de manera més completa a [38]; d'aquest resultat en deduïm la caracterització del teorema 17.

Una primera generalització del problema, desvelat a la definició 1, consisteix a demanar-se per una caracterització quan considerem paràgrafs on cada símbol apareix un total de dos cops. Volem trobar tantes corbes al pla com paraules, i que s'intersequin d'acord amb les lletres en comú en talls no tangencials. La caracterització dels paràgrafs al pla es pot deduir dels arguments de la secció 4; addicionalment, la caracterització de la secció 5 es pot aplicar directament a aquest cas.

<sup>2</sup> Una demostració més rigorosa de la proposició 2 es pot trobar dins la prova del teorema 8 a la secció 4.

<sup>3</sup> A part dels exemples, Godsil i Royle [21, teorema 17.4.2] donen condicions suficients per tal que la condició de Gauss sigui necessària quan permetem que la corba sigui immersa en una superfície orientable qualsevol.

Un cop obtinguda la caracterització dels codis de Gauss o paràgrafs del cas pla, una pregunta natural és demanar-se per la caracterització dels codis de Gauss que es poden representar per corbes en una superfície orientable de gènere  $g$ . Tot i que determinar el gènere mínim d'una superfície on el codi es pugui representar és difícil, hi ha resultats positius si la superfície és fixada i s'imposen algunes condicions naturals a les immersions de la corba i que sempre es compleixen en el cas planar [25, 24]. Una altra generalització consisteix a demanar-se per codis o paràgrafs de Gauss on cada símbol pot ser repetit més de dos cops: en aquest cas, cada punt d'intersecció pot ser visitat més de dos cops de manera no tangencial (vegeu [4, secció 5] i [3] per a una solució en el cas de 2 i/o 3 interseccions).

### 1.3 Resum dels resultats i organització del treball

Com hem descrit de manera breu anteriorment, en aquest article exposem dues solucions a la qüestió 1 que queden condensades en el teorema 8 i els teoremes 16 i 17 de les seccions 4 i 5. El teorema 8 és la primera caracterització que es va trobar; la demostració original és deguda a Dehn [5] i a Read i Rosenstiehl [29, 30, 32]; per a aquest article seguim la presentació [21, teorema 17.7.1].<sup>4</sup> El teorema 16 es pot trobar a [38].

Les caracteritzacions del teorema 8 i dels teoremes 16 i 17 tenen similituds —les dues utilitzen una estructura combinatòria auxiliar sobre la qual s'imposen restriccions, i aquesta estructura —que és diferent en els dos casos— s'obté mitjançant procediments conceptualment similars sobre la paraula. Més concretament:

- En el primer cas, teorema 8, la caracterització ve donada per la planaritat de l'estructura auxiliar (un diagrama de cordes) més una condició que tot codi de Gauss realitzable satisfà (proposició 2). Aquesta condició addicional ens permet refer, pas per pas, els punts de tall sobre l'estructura auxiliar sense comprometre'n la planaritat. Amb les modificacions pertinents introduïdes per Rosenstiehl i Tarjan a [33], aquesta caracterització dona un algorisme que determina si  $\omega$  és una paraula representable al pla en temps lineal. Addicionalment, en cas de resposta afirmativa, es construeix una corba que representa  $\omega$  al pla en temps lineal.
- En el segon cas, teorema 16, dona directament un procediment que, en temps lineal, troba una representació plana, si aquesta existeix, o bé respon que aquesta no existeix. El procediment depèn únicament d'una estructura auxiliar alternativa: el graf d'intersecció d'una col·lecció de cercles en una superfície que es poden interseccionar tangencialment, també coneguts com a *cercles de Seifert* [34]. D'aquest algorisme en podem deduir el teorema 17, que seria l'anàleg al teorema 8.

<sup>4</sup> Cal mencionar que altres caracteritzacions com ara les que usen l'estructura de cicles i el teorema de Mac Lane per a la caracterització dels grafs planars [27, 36] o de subestructures prohibides en la línia de la caracterització dels grafs planars de Kuratowski [26] precedeixen l'argument complet de la presentada com a teorema 8. Per altra banda, també hi ha refinaments de les idees de Dehn, Read i Rosenstiehl que són posteriors, com ara [4, 31] o [2].

Com veurem, les caracteritzacions presentades, teorema 8 i teoremes 16 i 17, són conceptualment similars en el fet que totes dues «desfan» els punts de tall (operació explicada en detall a la secció 3 i resumida en la figura 9) per tal d'obtenir les mencionades estructures auxiliars. A més, ambdues maneres de desfer els punts de tall són les més «naturals» perquè desfan els nusos simplement «girant la cantonada» en arribar a un punt de tall (vegeu la figura 9 i la secció 3 per a més detalls). A la secció 6 veurem com la solució al problema de Gauss també es trobava «girant una altra cantonada», més material que matemàtica.

A la secció 2 presentem els motius que van dur Gauss a considerar aquest problema i introduïm els grafs i mapes auxiliars necessaris per donar les caracteritzacions i que ens permetran de donar una altra perspectiva al problema. A la secció 3 veiem amb detall les operacions que fem al codi de Gauss per tal d'obtenir les mencionades estructures auxiliars. Finalment, les seccions 4, 5 i 6 estan dedicades a donar tres respostes a la qüestió 1.

## 2 Motivació, reformulacions, grafs i mapes

### 2.1 Motivació del problema, codis de Gauss signats

La motivació del problema dels codis de Gauss prové de la teoria de nusos. Un *nus* és una immersió de la circumferència  $S^1$  a l'espai tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Considerem que la circumferència està recorreguda en un sentit determinat i amb un punt inicial donat.<sup>5</sup> Dos *nusos* són *equivalents* si hi ha una deformació contínua  $H(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que per a cada  $t$  tenim una immersió d'una circumferència a  $\mathbb{R}^3$ , de manera que, per a  $t = 0$ , és el primer nus i, per a  $t = 1$ , el segon. Si projectem el nus sobre un pla genèric de tal manera que la preimatge de cada punt del pla interseca el nus un màxim de dos cops, aleshores obtenim una corba tancada al pla amb un nombre finit d'interseccions i cada intersecció és no tangent. Si afegim informació sobre els punts d'autointersecció al pla (o punts de tall de la corba) podem refer el nus. En particular, cal determinar quina de les dues branques de la circumferència passa per sobre i quina per sota; usem la convenció que la branca amb coordenada més petita respecte del pla és la que passa per sota. Així doncs, podem veure un nus com una corba tancada al pla amb la decoració adequada de les branques (quina passa per dalt, quina passa per baix) als punts d'intersecció.

Si ara volem expressar com és la corba al pla, podem assignar un símbol a cada punt d'intersecció, donar una llista de l'ordre en què els recorrem (paraula de  $2n$  lletres) per desplegar els trams de corba entre els punts, i com és la situació que ens trobem al punt de tall, o el *signe* del tall. Si prenem un punt arbitrari a la corba i un sentit de recorregut, podem parlar del primer i segon tram de corba que passa per un punt. El primer tram orientat divideix el pla entre esquerra i dreta (segons el sentit de recorregut). Aleshores, el segon tram

<sup>5</sup> També suposarem que existeix un  $\epsilon_0 > 0$ , dependent del nus, tal que la intersecció entre la circumferència i tota bola de radi  $\epsilon \leq \epsilon_0$  té una única component connexa. També suposarem que la circumferència a  $\mathbb{R}^3$  té longitud 1.

pot anar de dreta a esquerra (punt de tall negatiu) o d'esquerra a dreta (punt de tall positiu). Vegeu la figura 2.

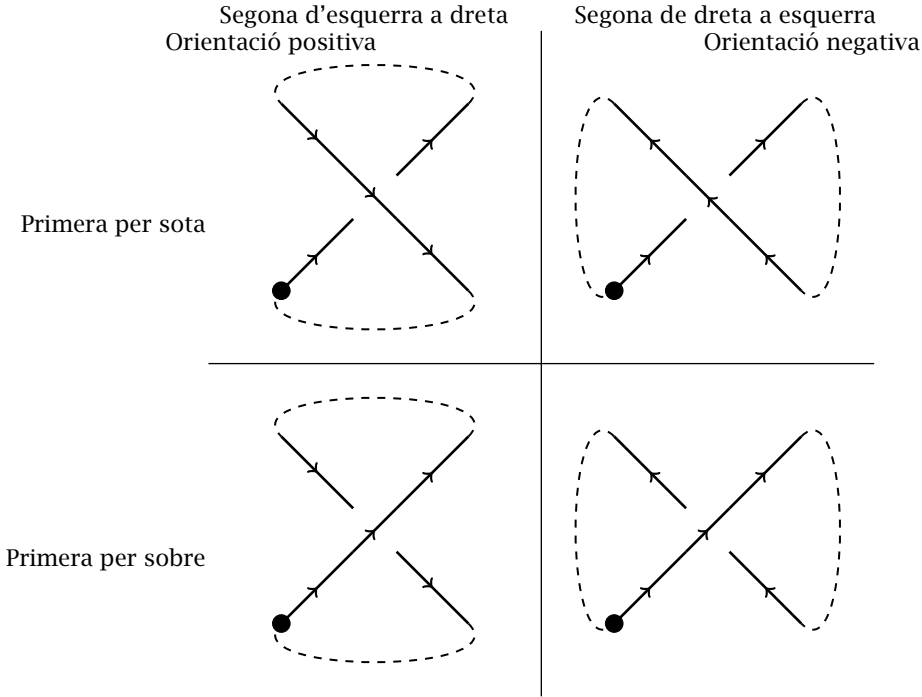


FIGURA 2: Possibles tipus d'interseccions en un nus.

Si assignem un símbol a cada intersecció,  $*^{+1}$  si passem per sobre,  $^{+}*$  si l'altra branca va d'esquerra a dreta, aleshores podem codificar el nus usant  $n$  símbols, cadascun d'ells repetit dos cops, amb un signe  $+$  o cap signe i un exponent  $+1$  o sense exponent (vegeu, per exemple, la part esquerra de la figura 3; per aclarir, usem  $-*$  o  $*^{-1}$  en comptes de no posar cap signe). Aquesta codificació de la representació del nus s'anomena *codi de Gauss signat estès*. Vegeu la figura 2.<sup>6</sup>

Així doncs, si prescindim dels signes, per a cada nus obtenim un codi de Gauss. La qüestió 1 pot ser reformulada de la manera següent: quins són els codis de Gauss que provenen d'un nus? Tot i que és crucial per determinar si dos nusos són equivalents o no, la informació respecte a si la branca passa per dalt o per baix és irrellevant en aquest cas. Efectivament, si tallem la branca

<sup>6</sup> Si el primer cop que travessem la intersecció la corba passa per sobre, llavors el segon cop passarà per sota (i al revés). Si el primer cop l'altra branca travessa la corba de dreta a esquerra, el següent cop la travessarà d'esquerra a dreta (i al revés). Per tant, amb la convenció que el primer cop que travessem la intersecció codifiquem el pas sobre/sota i el segon cop codifiquem esquerra/dreta, podem codificar el nus usant  $n$  símbols, cadascun repetit dos cops, i amb signe  $+$  o sense signe.

que passa per sota just abans i just després del punt de tall  $s$  i la canviem per un «pont», obtenim un nou nus amb la mateixa projecció plana on l'únic canvi és el pas sobre/sota de  $s$ . Per altra banda, la informació respecte del signe del punt de tall és rellevant per a aquesta pregunta. En particular, no hi ha cap nus que ens doni la projecció plana amb els signes

$$[+a]bca[+b][+c] \text{ o bé } [+a][-b][-c][-a][+b][+c], \quad (1)$$

però sí amb els signes

$$a[+b]c[+a]b[+c] \text{ o bé } [-a][+b][-c][+a][-b][+c],$$

com, per exemple, el nus trèvol (vegeu la figura 3):

$$[a][+b^{+1}][c][+a^{+1}][b][+c^{+1}] \text{ o } [-a^{-1}][+b^{+1}][-c^{-1}][+a^{+1}][-b^{-1}][+c^{+1}].$$

Si prescindim de la informació respecte a si els trossos de corba passen per sobre o per sota, obtenim un *codi de Gauss signat*.

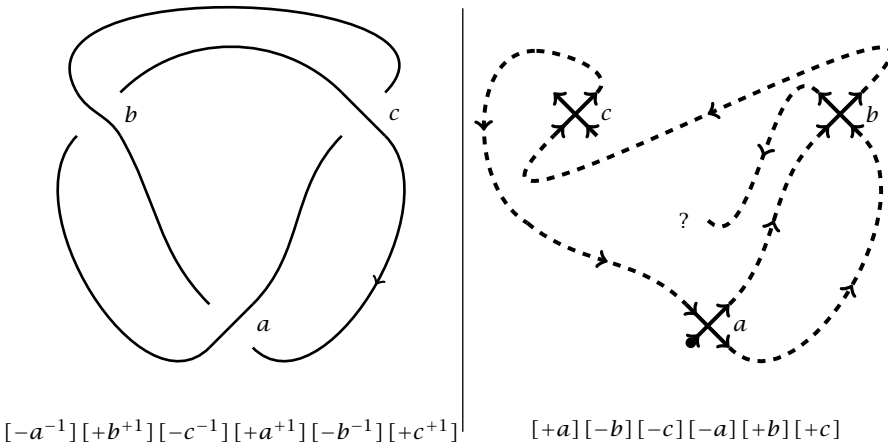


FIGURA 3: Nus trèvol, punt inicial de recorregut a la fletxa, i codi de Gauss no pla.

### 2.2 Grafs i mapes

En aquest article entendrem un *graf dirigit* com una parella formada per un conjunt de *vèrtexs*  $V$  i un multiconjunt d'*arestes*  $E = (V \times V, f)$ , on  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{N}$  indica, per a cada parell ordenat  $(u, v) \in V \times V$ , el nombre d'aparicions a  $E$ . Denotem les arestes pels parells ordenats i permetem que el graf tingui llaços, o parells de la forma  $(u, u)$ . En el nostre cas, tant  $V$  com  $E$  són finits.

En un graf dirigit, l'aresta  $(u, v)$  denota l'aresta de  $u$  a  $v$  i és diferent de l'aresta de  $v$  a  $u$  o  $(v, u)$ . Usarem el terme *graf no dirigit* per referir-nos a un graf dirigit on hem oblidat les direccions; en aquest cas denotarem per  $\{u, v\}$  l'aresta entre  $u$  i  $v$ : l'aresta  $\{u, v\}$  és present al graf si el graf dirigit



conté l'aresta  $(u, v)$  o bé l'aresta  $(v, u)$ . Dos vèrtexs  $u$  i  $v$  es diu que són *adjacents* si  $(u, v)$  o bé  $(v, u)$  són arestes del graf.

Un graf (dirigit o no dirigit) és *connex* si entre dos vèrtexs diferents qualssevol  $v_i$  i  $v_f$  hi ha un *camí* entre ells: un conjunt de vèrtexs  $v_i = v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v_f$  tals que l'aresta  $(v_j, v_{j+1})$  o bé l'aresta  $(v_{j+1}, v_j)$  pertanyen a  $E$ . En el nostre cas només considerem grafs connexos. En certs contextos ens serà útil parlar de diferents orientacions (o direccions) de les arestes en un mateix graf no dirigit; usarem  $\sigma$  per denotar una orientació de les arestes.

En un graf dirigit, un *camí eulerià* és una ordenació de les arestes del graf  $E = ((v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2|E|-1}, v_{2|E|}))$  tal que  $v_{2i} = v_{2i+1}$  i  $v_1 = v_{2|E|}$ ; això és, un camí dirigit passa per totes les arestes del graf un únic cop. Si el graf conté un camí eulerià es diu que el graf és *eulerià*.

Una *immersió d'un graf*  $G$  en una superfície  $\Sigma$  és un conjunt de corbes  $\mathcal{U}$  (tantes com arestes en  $E$ ) i punts  $\mathcal{P}$  (tants com vèrtexs en  $V$ ) a  $\Sigma$  tals que la corba  $(v_1, v_2)$  té  $v_1$  com a punt inicial,  $v_2$  com a punt final, no passa per cap altre vèrtex, i dues corbes només s'intersequen en vèrtexs. La immersió és *2-cel·lular* si cada peça connexa a  $\Sigma \setminus [\mathcal{U} \cup \mathcal{P}]$  (eliminant els punts de la superfície pertanyents al graf) és homeomorfa a un disc obert 2-dimensional. Un *mapa* és un graf immers 2-cel·lularment en una superfície compacta i sense vora. Només considerarem superfícies orientables. Les peces homeomorfes a discs són les *cares* del mapa. Si el graf immers és un graf dirigit (o també dit graf orientat), aleshores podem emfatitzar aquest fet i parlar de *mapa dirigit* o *mapa orientat*; no usarem l'adjectiu si el context deixa clar si el graf immers és orientat o no.

A l'hora de representar els mapes sobre superfícies orientables de manera combinatòria és més còmode dividir les arestes del graf en «meitats d'aresta» o dards. Llavors, un graf es pot veure com un conjunt de vèrtexs  $V$ , un conjunt de dards  $D$  amb un nombre parell d'elements, una involució  $\iota: D \rightarrow D$  sense punts fixos ( $\iota^2$  és la identitat) i una aplicació d'*incidència*  $A: D \rightarrow V$ . L'aplicació  $\iota$  aparella els dards formant les arestes, i  $A$  ens indica a quin vèrtex hem d'adherir el dard. Si l'aresta és dirigida, signem els dards amb «+» o «-» de manera que a l'aresta  $(v_1, v_2)$  el dard incident a  $v_1$  és negatiu (surto) i el dard incident a  $v_2$  és positiu (entra). En el cas de mapes orientats, usem  $\sigma$  per denotar l'assignació de signes oposats als dos dards d'una aresta de manera que l'aresta del graf subjacent està dirigida del vèrtex incident al dard negatiu cap al vèrtex incident al dard positiu; per altra banda, una assignació de signes oposats als dos dards d'un mapa genera una orientació de les arestes del graf (del vèrtex incident al dard negatiu cap al vèrtex incident al dard positiu).

Donat el mapa  $M$  corresponent a una immersió del graf  $G$  a la superfície orientable  $\Sigma$ , podem usar l'orientació de  $\Sigma$  per induir un ordre cíclic dels dards (arestes) al voltant d'un vèrtex de  $G$ . Si retallem un disc suficientment petit centrat en un vèrtex de tal manera que el disc conté un únic tros de corba connex per a cada dard, aleshores l'orientació ens permet induir un ordre circular, seguint el sentit antihorari respecte a l'orientació positiva de la superfície, als dards incidents al vèrtex. Vegeu la figura 4. Podem identificar les cares de  $\Sigma \setminus G$  amb la seqüència d'arestes en ordre circular que componen

la vora de la cara. Més concretament, podem identificar cada cara amb la seqüència de dards que la deixen a mà esquerra si recorrem la vora de la cara en sentit antihorari i si considerem que els dards tenen com a punt inicial el vèrtex al qual estan adherits. Vegeu la figura 4.

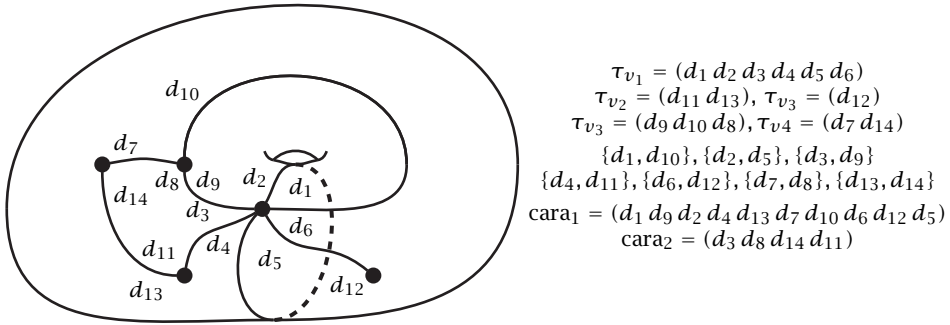


FIGURA 4: Mapa al tor.

Observem que podem revertir aquesta construcció: si per a cada vèrtex  $v$  de  $G$  donem un ordre cíclic als dards indicents a  $v$ , podem generar un mapa  $M$  que és la immersió del graf  $G$  en una superfície orientable. Codifiquem aquests ordres cíclics com els cicles en què descompon una permutació entre els dards  $\tau: D \rightarrow D$ : podem identificar els cicles de  $\tau$  amb els vèrtexs de  $G$ . Definim les cares com la seqüència de dards  $(d_1, \dots, d_k)$  tal que  $d_i = \tau^{-1} \iota d_{i-1}$ . És a dir, tenint el dard  $d_{i-1}$ , l'aplicació  $\iota$  ens trasllada a la seva parella (a l'altra banda de l'aresta), i l'aplicació  $\tau^{-1}$  ens dona l'anterior dard en l'ordre cíclic de dards al voltant del vèrtex corresponent. Si adherim discs a les arestes corresponents a la seqüència de dards que formen les cares esperant-ne l'ordenació, obtenim una superfície compacta sense vora. Vegeu la figura 5.

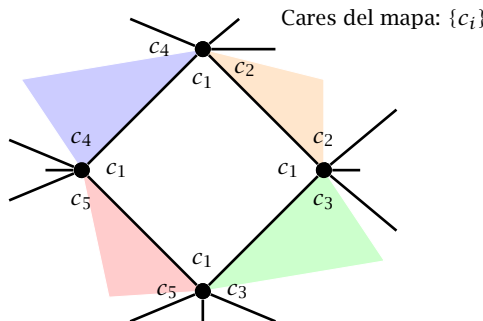


FIGURA 5: Cares d'un mapa.

Amb una mica d'imaginació podem veure que la superfície és orientable i el graf hi està immers 2-cel·lularment i induint el mateix ordre cíclic de les arestes al voltant dels vèrtexs que el donat per  $\tau$  [8]. Dit d'una altra manera: la immersió de  $G$  a  $\Sigma$  determina unívocament un ordre cíclic  $\tau$  i, a més a més,

la superfície generada per  $G$  i l'ordre cíclic  $\tau$  és homeomorfa a  $\Sigma$ .<sup>7</sup> El conjunt d'ordres cíclics de les arestes incidents a cada vèrtex s'anomena *sistema de rotacions*.

### 2.3 Codis de Gauss i mapes

Qualsevol codi o paràgraf de Gauss ens dona, de manera natural, un *graf enriquit* dirigit amb quatre arestes incidents a cada vèrtex, dues entrant i dues sortint. L'enriquiment prové de la informació respecte al camí que la paraula proporciona (en el cas d'un codi de Gauss, aquest camí és eulerià). Més concretament,

**DEFINICIÓ 3 (GRAF I GRAF ENRIQUIT D'UN CODI DE GAUSS.).** Sigui  $\omega$  un codi (o un paràgraf) de Gauss no signat en  $n$  símbols  $\{s_1, \dots, s_n\}$  i  $2n$  lletres  $\{l_1, \dots, l_{2n}\}$ . El *graf de  $\omega$*  és un graf dirigit 4-regular  $\text{Gr}(\omega) = (V, E) = G$  on:

- $V(G)$  són els símbols de  $\omega$ :  $\{s_1, \dots, s_n\}$ .
- Posem una  $(s_j, s_i)$  si  $s_i$  segueix  $s_j$  en l'ordre cíclic induït per  $\omega$ . Més precisament,  $E(G)$  és el conjunt d'arestes  $\{(J(l_i), J(N(l_i)))\}_{i \in [2n]}$ , on  $J(\cdot)$  ens dona el símbol de la lletra  $l_i$  i  $N(\cdot)$  ens dona la següent lletra de  $\omega$ .

*Enriquim* el graf  $G$  aparellant, per a cada vèrtex  $s_0$ , l'aresta  $(s_i, s_0)$  amb  $(s_0, s_j)$  si hi ha tres lletres  $l_1, l_2$  i  $l_3$  tals que  $J(l_1) = s_i, J(l_2) = s_0, J(l_3) = s_j$  i  $l_2 = N(l_1), l_3 = N(l_2)$ . És a dir, les tres lletres són consecutives a  $\omega$ .

**EXEMPLE 4.** El graf enriquit del codi de Gauss de la figura 6 ve donat pels vèrtexs  $V = \{a, b, c, d\}$ , les arestes

$$E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, a)\} = \{e_0, e_1, \dots, e_7\}$$

i l'aparellament  $\{e_i, e_{i+1}\}$  amb  $i \in [0, 7]$  i índexs mòdul 8.

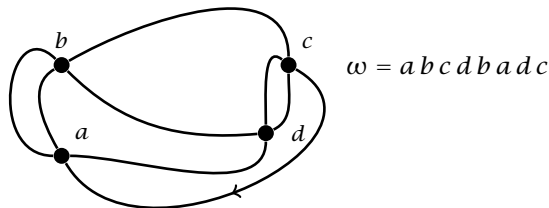


FIGURA 6: Corba representable al pla.

<sup>7</sup> Si volem considerar mapes en superfícies compactes no orientables, aleshores ho podem fer usant *banderes*, o quarts d'aresta; cada arista és vista com un rectangle amb un costat més llarg, i les banderes són les quatre cantonades. Tenim un parell de banderes adjuntes a cada vèrtex (és d'un costat curt), un ordre cíclic de les arestes al voltant de cada vèrtex, i un parell d'involucions sense punts fixos: una que intercanvia les dues banderes associades a cada vèrtex (aparella les cantonades dels costats curts) i la que intercanvia els parells associats als dos vèrtexs que conformen l'aresta (intercanvia els parells d'arestes segons el costat llarg del rectangle).

Si el codi o paràgraf de Gauss està signat, aleshores tenim un mapa amb les arestes dirigides de la manera següent:

**DEFINICIÓ 5 (MAPA D'UN CODI (PARÀGRAF) DE GAUSS SIGNAT).** El mapa del codi de Gauss signat  $\omega^+$ ,  $Gs(\omega^+) = (V, E)$  ve definit pel graf del codi de Gauss sense signar amb el següent sistema de rotacions  $\tau$ :

- Si  $\omega^+$  és

$$(\dots s_1 [+s_0] s_2 \dots s_3 s_0 s_4 \dots) \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} (\dots s_1 [+s_0] s_2 \dots) \\ (\dots s_3 s_0 s_4 \dots) \end{cases}$$

(el punt de tall  $s_0$  és positiu), aleshores al voltant de  $s_0$  hi tenim els dards ordenats cíclicament

$$(d_{s_1}^+, d_{s_4}^-, d_{s_2}^-, d_{s_3}^+),$$

on  $d_{s_i}^\pm$  és el dard amb l'altre extrem de l'aresta a  $s_i$  i signat  $\pm$ . Vegeu la figura 2 o la part esquerra de la figura 14.

- Si  $\omega^+$  és

$$(\dots s_1 s_0 s_2 \dots s_3 + s_0 s_4 \dots) \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} (\dots s_1 s_0 s_2 \dots) \\ (\dots s_3 + s_0 s_4 \dots) \end{cases}$$

(el tall  $s_0$  és negatiu), aleshores al voltant de  $s_0$  hi tenim els dards ordenats cíclicament

$$(d_{s_1}^+, d_{s_3}^+, d_{s_2}^-, d_{s_4}^-),$$

on  $d_{s_i}^\pm$  és el dard amb l'altre extrem de l'aresta a  $s_i$  i signat  $\pm$ . Vegeu la figura 2 o la part esquerra de la figura 14.

**EXEMPLE 6.** El codi de Gauss signat de la figura 6 és

$$[+a] [-b] [-c] [+d] [+b] [-a] [-d] [+c]$$

i el mapa  $Gs(\omega^+)$  ve donat pels vèrtexs  $V = \{a, b, c, d\}$ , les arestes

$$E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, a)\},$$

on l'aresta  $(i, j)$  genera el dard  $d_{i \rightarrow j}^-$  incident al vèrtex  $i$  i  $d_{i \rightarrow j}^+$  incident al vèrtex  $j$  i el sistema de rotacions ve donat per les permutacions cícliques

$$\begin{cases} a \rightarrow (d_{b \rightarrow a}^+, d_{c \rightarrow a}^+, d_{a \rightarrow d}^-, d_{a \rightarrow b}^-), \\ b \rightarrow (d_{a \rightarrow b}^+, d_{d \rightarrow b}^+, d_{b \rightarrow c}^-, d_{b \rightarrow a}^-), \\ c \rightarrow (d_{b \rightarrow c}^+, d_{d \rightarrow c}^+, d_{c \rightarrow d}^-, d_{c \rightarrow a}^-), \\ d \rightarrow (d_{a \rightarrow d}^+, d_{c \rightarrow d}^+, d_{d \rightarrow c}^-, d_{d \rightarrow b}^-). \end{cases}$$

La signatura dels dards de la definició 5 és compatible amb l'orientació de les arestes del graf descrit a la definició 3. L'enriquiment ens indica quina de les quatre arestes incidents amb el vèrtex correspon a «seguir recte»; a la permutació dels quatre dards al voltant del vèrtex, seguir recte després del dard  $d$  correspon al dard que no és ni  $\iota(d)$  ni  $\tau^{-1}(\iota(d))$ .

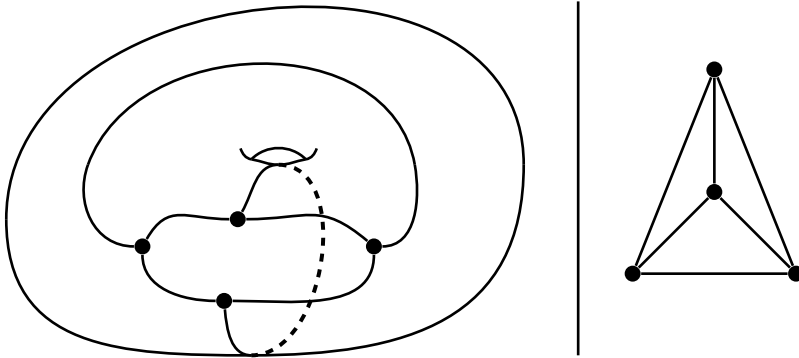


FIGURA 7: Graf complet en 4 vèrtexs al tor i al pla.

Donat un mapa, el conjunt de cares dona lloc a una partició del conjunt de dards i cada cara es pot trobar fàcilment com la seqüència  $(d, \tau^{-1}(\iota(d)), [\tau^{-1}(\iota)]^2(d), \dots)$ . Llavors, podem trobar, de manera senzilla, el nombre de cares en un nombre d'operacions lineal en el nombre d'arestes del mapa. Amb la fórmula d'Euler

$$\text{vèrtexs} - \text{arestes} + \text{cares} = 2 - 2 \text{ gènere}$$

podem determinar el gènere de la superfície on el codi de Gauss signat està immers. Així doncs, determinar si un codi de Gauss signat prové d'un nus és equivalent a comprovar que aquest gènere és zero, i això es pot determinar en temps lineal en el nombre de símbols de la paraula.<sup>8</sup>

### 2.4 Un mapa per un codi de Gauss sense signe

Com hem vist a la figura 3 i a l'equació (1), diferents signatures d'un codi de Gauss sense signe ens poden donar diferents superfícies. En particular, l'ordre cíclic de les arestes del graf introduït a la definició 3 no està determinat. Per això el problema de determinar si un codi de Gauss no signat prové d'un nus és, en principi, més complicat de resoldre. Per posar-ho en el context de la secció anterior, podem reformular la qüestió 1 de la manera següent:

<sup>8</sup> Suposant que, donats un vèrtex  $u$  i una aresta adjacent  $a = (u, v)$ , podem accedir a la informació del vèrtex  $v$  en temps constant, i a les arestes següent i anterior a  $a$  en temps constant.

**QÜESTIÓ 2 (PROBLEMA DE GAUSS, EQUIVALENT).** *Donat un codi de Gauss (no signat)  $\omega$ , hi ha alguna manera de signar-lo per tal que el mapa que indueix (el codi de Gauss signat) sigui pla?*

Donat que podem examinar les  $2^n$  possibles maneres de signar la paraula en  $n$  símbols de manera exhaustiva, i que podem determinar si és un mapa pla o no en un nombre d'operacions lineal en  $n$ , podem resoldre la qüestió 2 i, per tant, la qüestió 1 usant força bruta en un nombre d'operacions de l'ordre de  $n2^n$ . La qüestió interessant algorítmicament és, doncs, la de donar una resposta positiva o negativa en substancialment menys operacions que  $Cn2^n$ , on  $C$  és una constant. Com veurem, podrem determinar si un codi de Gauss és realitzable al pla en temps lineal en  $n$ , que és el mateix ordre que determinar si un codi de Gauss signat és pla.

**2.5 Diagrama de cordes d'un codi de Gauss i el seu graf d'intersecció**

Denotem per  $[2n]$  el conjunt  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  i per  $\binom{[2n]}{2}$  el conjunt de parelles  $\{a, b\}$  amb  $a, b \in [2n]$  i  $a \neq b$ . Un *diagrama de cordes* en  $2n$  punts  $v_1, \dots, v_{2n}$  és un graf format pels vèrtexs  $v_1, \dots, v_{2n}$  i pel conjunt d'arestes  $\{(v_i, v_{i+1 \pmod{2n}}) : i \in [2n]\}$  anomenat *la vora del diagrama*, juntament amb un *aparellament perfecte* (un conjunt d'arestes  $\{(v_i, v_j)\}_{(i,j) \in \binom{[2n]}{2}}$  tal que cada  $v_i$  apareix exactament un cop en alguna de les arestes de l'aparellament). Vegeu la figura 8.

Un codi de Gauss  $\omega = l_1 \dots l_{2n}$  genera un diagrama de cordes de manera natural amb vèrtexs  $\{l_1, \dots, l_{2n}\}$ , vora  $\{(l_i, l_{i+1 \pmod{2n}}) : i \in [2n]\}$ , i on l'aparellament perfecte ve donat pel parell de lletres amb el mateix símbol.

La manera estàndard de dibuixar un diagrama de cordes és disposar els  $2n$  punts al cercle pla, de tal manera que el cercle dibuixa les arestes de la vora i l'aparellament perfecte es dibuixa a l'interior. El *graf d'intersecció*  $I$  d'un diagrama de cordes  $C$  és el graf que té un vèrtex per a cada aresta de l'aparellament, i dos vèrtexs a  $I$  són adjacents si les respectives arestes es tallen a  $C$ . Vegeu la figura 8.

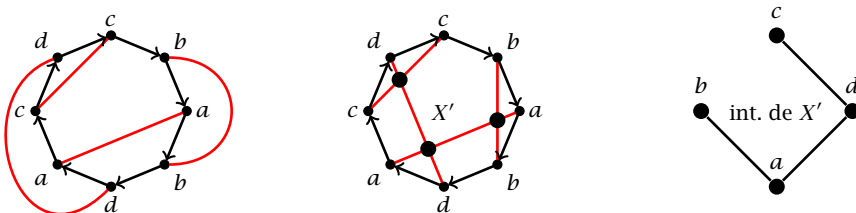


FIGURA 8: Exemple de diagrama de cordes, mateix diagrama de cordes amb les interseccions remarcades, i graf d'intersecció del diagrama de cordes anterior.

Passem a demostrar una relació entre un diagrama de cordes i el seu graf d'intersecció, que ens serà d'utilitat i que podem trobar a [21].

PROPOSICIÓ 7. *Sigui  $X$  un diagrama de cordes, aleshores*

*$X$  és planar  $\iff$  el graf d'intersecció de  $X$  és un graf bipartit.*

PROVA. En qualsevol immersió plana d'un diagrama de cordes planar, la vora del diagrama de cordes forma una corba tancada sense autointerseccions; les cordes de l'aparellament han de passar per l'exterior o l'interior d'aquesta. Donat que cap aresta es talla, les arestes de l'interior no es tallen dues a dues, ni les de l'exterior es tallen dues a dues.

Així doncs, al graf d'intersecció, els vèrtexs corresponents a les arestes interiors del diagrama de cordes formen un conjunt *independent* (sense arestes entre els vèrtexs, ja que les corresponents arestes no es tallen), i el mateix passa amb les arestes exteriors. Així doncs, totes les arestes del graf d'intersecció apareixen entre arestes de l'interior i de l'exterior en un mapa pla del diagrama de cordes.

Aquest argument és reversible: si dos conjunts de vèrtexs independents donen lloc a una partició dels vèrtexs del graf d'intersecció d'un diagrama de cordes, aleshores dibuixant unes arestes a l'interior i les altres a l'exterior de la vora del diagrama, obtenim un mapa al pla (sense punts de tall entre les arestes del diagrama de cordes). Notem que dibuixem la vora del diagrama de cordes com un polígon regular al pla.  $\square$

### 3 Desfer el nus

Quan tenim un diagrama pla d'un nus i un punt de tall  $s$ , podem «desfer» o «resoldre»  $s$  de dues maneres diferents. Vegeu la figura 9. Aquestes formes de resoldre'l estan relacionades amb les maneres que tenim per sortir de l'encreuament que representa el punt de tall:

- (i) Seguir el camí que marca la corba. Prenem el camí que «surt» del punt de tall sense canviar la direcció. (Aquí no fem res i, per tant, no desfem el punt de tall.)
- (ii) Mantenir el sentit però canviant de direcció. Prenem l'altre camí que «surt» del punt de tall i que no és seguint la corba.
- (iii) Canviant la direcció i el sentit del camí. Prenent l'altre camí que «entra» al punt de tall, canviant el sentit del tram corresponent de corba (fins que tornem a trobar el mateix punt de tall).

Tant en el cas (ii) com en el (iii), si ens aturem just abans d'arribar al punt de tall i prenem una petita dreuera cap a la branca que canvia de direcció, aleshores eliminem el punt de tall (vegeu com la figura central a la figura 9 es transforma en les figures laterals sense el punt de tall). Així, en aplicar (ii) o (iii) al punt de tall  $s$ , podem dir que les corbes «es toquen» a  $s$  sense tallar-se, o bé que es tallen tangencialment a  $s$ , o bé que hem desfet el punt de tall  $s$ .

Si tenim un codi de Gauss

$$\omega = Xs_1s_0s_2Ys_3s_0s_4Z,$$

on  $X, Y$  i  $Z$  són paraules, i considerem el punt de tall  $s_0$ , aleshores l'efecte d'aplicar (i) deixa la paraula invariant. Si apliquem (ii),  $\omega$  es transforma en el paràgraf

$$\begin{cases} Xs_1s_4Z \\ s_2Ys_3 \end{cases}$$

i  $s_0$  ha desaparegut: l'hem «desfet» o «resolt».

Si fem el canvi (iii), obtenim la paraula

$$Xs_1s_3\bar{Y}s_2s_4Z,$$

on  $\bar{Y}$  denota la paraula  $Y$  amb les lletres en ordre invertit:  $\overline{abc\dots t} = t\dots cba$ . En aquest cas, hem canviat el sentit dels trams de corba entre les lletres de  $Y$ .

En els casos (ii) i (iii), i degut al fet que ens interessarà de reconstruir o desfer aquestes operacions, usarem

$$\begin{cases} Xs_1s'_0s_4Z \\ s''_0s_2Ys_3 \end{cases} \quad \text{o bé} \quad Xs_1s'_0s_3\bar{Y}s_2s''_0s_4Z$$

per denotar que els nous codis de Gauss comparteixen el punt de tall  $s_0$  i denotar la seva localització abans de desfer el tall. Considerem que  $s'_0$  i  $s''_0$  són dos punts de la corba (o les corbes) diferents del pla que ja no són punts de tall; alternativament, podem considerar que  $s'_0$  i  $s''_0$  és un punt d'intersecció on les corbes es tallen tangencialment i no es creuen (es besen).

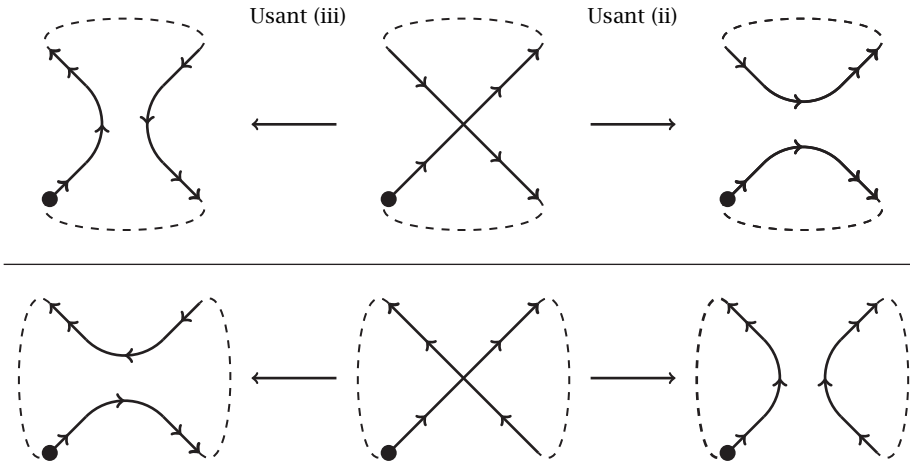


FIGURA 9: «Simplificació» del codi de Gauss: eliminem encreuaments i donem informació alternativa amb la qual recuperar-los.



### 3.1 Refer els punts de tall

Per tal d'invertir l'operació (ii) cal que la part de la corba que passa per  $s'_i$  i la que passa per  $s''_i$  tinguin sentits congruents. Per tal de desfer (iii) cal que la part de la corba que passa per  $s'_i$  i la que passa per  $s''_i$  tinguin sentits oposats. Vegeu la figura 9.

Com que l'operació (ii) no canvia el sentit de cap tram de corba, sempre podem invertir aquesta operació. Per altra banda, l'operació (iii) canvia el sentit d'un dels trams de corba entre els dos cops que passa pel punt de tall. Això fa que, si apliquem primer l'operació al punt de tall  $s_0$  i després a  $s_1$ , pot succeir que no puguem revertir l'operació a  $s_0$  si no revertim abans l'operació a  $s_1$ . Vegeu la figura 10. Aquest punt serà important a la secció 4.

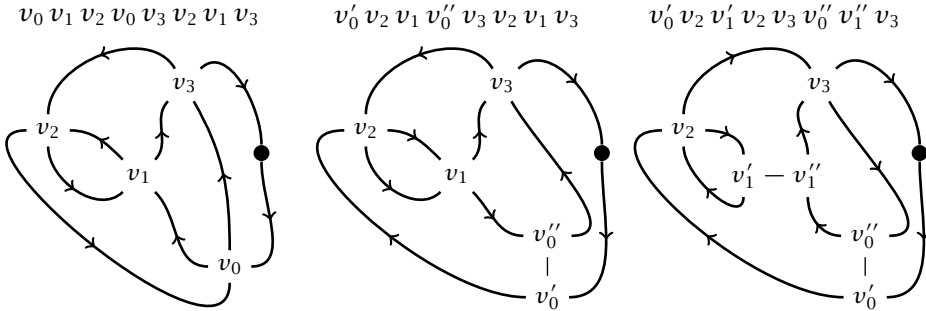


FIGURA 10: Si resollem primer  $v_0$  i després  $v_1$ , aleshores no podem desfer la resolució de  $v_0$  si no desfem abans la de  $v_1$ .

### 3.2 Desfent els punts de tall

Un cop presentades les operacions (ii) i (iii) és natural preguntar-se què passa si desfem seqüencialment (seguint un ordre a l'atzar o el criteri preferit del lector) tots els punts de tall usant el mateix criteri ((ii) o (iii)).

**Canviant el sentit i la direcció: aplicant (iii).** Aplicant un cop (iii) a un codi de Gauss representat per  $\gamma$  obtenim una altra corba. És clar que el resultat final d'aplicar sempre el criteri (iii) serà una nova corba sense punts de tall  $\gamma'$  (vegeu la part esquerra de la figura 9 o la figura 10). Si  $\gamma$  és al pla, aleshores  $\gamma'$  també serà al pla, és a dir,  $\gamma'$  és una circumferència deformada al pla. Si en desfem els nusos deformem la corba el mínim possible i mantenim els nous punts  $s'_i$  i  $s''_i$  propers al punt de tall original  $s_i$ , aleshores podem connectar  $s'_i$  i  $s''_i$  amb una corda addicional sense obtenir nous punts de tall.

Així, si la corba original induïa un mapa pla, obtenim un diagrama de cordes que és un graf planar (les arestes de l'aparellament perfecte poden ser dibuixades per dins o per fora de la vora del diagrama de cordes).

Observem que l'ordre en què hem processat els vèrtexs és rellevant ja que determinarà l'ordre cíclic dels vèrtexs de la vora del diagrama de cordes. A més, si primer desfem  $s_0$  i després  $s_1$ , pot succeir que no puguem refer  $s_0$

immediatament (vegeu la figura 10 amb  $s_0 = \nu_0$  i  $s_1 = \nu_1$ ). Al teorema 8 veurem que, partint del cercle pla amb tots els tall desfet i imposant la condició de Gauss, podem refer els punts de tall en ordre invers a com els hem desfet, i així obtenim la caracterització.

**Canviant la direcció però no el sentit: aplicant (ii).** Si apliquem (ii) consistentment als diferents punts de tall a  $\gamma$  una corba al pla, aleshores el conjunt de corbes tancades resultants també és al pla i no es tallen (ni entre corbes diferents ni una corba amb si mateixa). Així, cada corba és un (homeomorf a un) cercle i determina dues cares del pla, la interior i l'exterior. Efectivament, a cada pas, reduïm el nombre de punts de tall totals en una unitat (sempre que  $s'_i$  i  $s''_i$  siguin propers a  $s_i$  no creem nous punts de tall en resoldre  $s_i$ ).

Com que l'orientació de les arestes de la corba original no canvia, sempre podem recrear qualsevol punt de tall original  $s_i$  i mantenir el conjunt de corbes al pla. A més, els cercles resultants tenen una orientació congruent a  $s'_i$  i  $s''_i$ : els dos cercles giren en el mateix sentit i estan «engranats» com els engranatges d'un rellotge. Aquests cercles reben el nom de *cercles de Seifert* [35], que els va usar per construir una superfície on la vora coincideix amb un nus donat qualsevol. Els cercles de Seifert depenen només del codi de Gauss (la paraula) i no de la seva possible realització plana (vegeu la subsecció 5.1).

El fet que els cercles de Seifert poden ser al pla si el codi de Gauss és realitzable, juntament amb el fet que han d'estar engranats, permet la caracterització donada al teorema 16 i al teorema 17.

#### 4 Girant la primera cantonada

En aquesta secció seguirem l'excel·lent presentació de Godsil i Royle [21] de la caracterització dels codis de Gauss representables de Dehn [5] i refinada per Read i Rosenstiehl [29, 30, 32].

**TEOREMA 8 (CARACTERITZACIÓ DELS CODIS DE GAUSS).** *Sigui  $\omega$  un codi de Gauss i  $\omega'$  el codi de Gauss obtingut de  $\omega$  capgirant les lletres entre qualsevol parell de lletres del mateix símbol, seqüencialment, en qualsevol ordre (aplicant (iii)). Aleshores, el codi de Gauss  $\omega$  és realitzable al pla si i només si:*

- (a) *entre cada parell de lletres del mateix símbol hi ha un nombre parell de lletres, i*
- (b) *el diagrama de cordes de  $\omega'$  és planar.*

*Equivalentment:*

- (a') *tots els vèrtexs del graf d'intersecció del diagrama de cordes de  $\omega$  tenen grau parell, i*
- (b') *el graf d'intersecció del diagrama de cordes de  $\omega'$  és bipartit.*

**PROVA.** Denotem els símbols per  $s_1, \dots, s_n$  i suposarem que els processem, usant (iii), seguint l'ordre creixent en el subíndex. Usarem  $t_0, \dots, t_{n-1}$  per denotar símbols genèrics, no necessàriament en l'ordre  $s_1, \dots, s_n$ .

Si  $\omega$  és realitzable al pla, aleshores (b) se satisfà. Si

$$\omega = \dots t_1 s_1 t_2 \dots t_3 s_1 t_4 \dots$$

és un codi de Gauss realitzable, i  $\gamma$  una corba que el realitza, aleshores si desfem el punt de tall  $s_1$  usant (iii) generem dos punts nous  $s'_1, s''_1$  i trams de corba  $t_1 s'_1 t_3$  i  $t_2 s_1 t_4$ . Si  $s'_1$  i  $s''_1$  són propers a  $s_0$  al pla, aleshores podem afegir una corda entre  $s'_1$  i  $s''_1$  sense crear cap punt de tall addicional. Repetint aquest procés seqüencialment obtenim la nova paraula  $\omega'$  que té, per diagrama de cordes, el mapa obtingut mitjançant l'addició de les cordes entre  $s'_i$  i  $s''_i$ . Aquest diagrama és pla ja que hem desfet tots els punts de tall i no n'hem creat de nous en afegir les cordes.

Si  $\omega$  és realitzable al pla, aleshores (a) se satisfà. Veure aquesta part és equivalent a veure la proposició 2. A  $\gamma$  les dues lletres amb el mateix símbol  $a$  generen una subcorba tancada.

Si entre les dues còpies de  $a$  no hi ha símbols repetits, aleshores el tram no té autointerseccions i podem aplicar el teorema de la corba tancada de Jordan. El tram tancat de corba divideix el pla en dues regions, la resta de la corba s'inicia i finalitza en la mateixa regió, de manera que cada cop que entrem a l'altra regió, n'hem de sortir. Com que cada cop que entrem a la regió o en sortim això correspon a un punt de tall del tram de corba, el nombre de talls (que correspon al nombre de lletres entre les dues còpies del símbol  $a$ ) és parell.

Si entre dues còpies de  $a$  hi ha símbols repetits, usem inducció en el nombre de parelles repetides niades. Si

$$\omega = \dots t_0 X_0 t_1 X_2 \dots t_i X_i t_i Y_{i-1} t_{i-1} \dots t_1 Y_0 t_0 \dots,$$

on  $t_0, t_1, \dots, t_i$  són els símbols niats, aleshores les subcorbes

$$t_0 X_0 t_1 Y_0 (t_0)$$

$$t_1 X_1 t_2 Y_1 (t_1)$$

$$\vdots$$

$$t_i X_i (t_i)$$

formen  $i + 1$  corbes tancades que no s'autointersequen (tot i que dues a dues sí es poden intersecar). Aquestes corbes es troben aplicant l'operació (ii) de desfer nusos als punts de tall  $t_0, \dots, t_i$ . Si a cada cercle apliquem el resultat de la corba tancada de Jordan i tenim en compte que quan dos cercles s'intersequen ho han de fer un nombre parell de vegades, obtenim el resultat desitjat (en aquest cas entre les dues còpies de  $t_0$ ).

La condició (a) i la condició (a') són equivalents. Amb aquesta demostració quedarà establerta l'equivalència entre les condicions (a) + (b) i (a') + (b') ja que l'equivalència entre les condicions (b) i (b') prové de la proposició 7. Cada parell

de lletres de  $\omega$  del mateix símbol  $s_1$  divideix la paraula en dues parts  $A_1$  i  $A_2$ . Llavors, dues còpies del símbol  $s_i$  estan a diferents parts si i només si  $s_1$  i  $s_i$  són adjacents al graf d'intersecció de  $\omega$ . (L'aresta  $s_j$  del diagrama de cordes no creua l'aresta  $s_1$  quan els símbols estan niats; vegeu a la figura 8 arestes de  $a$  i de  $c$ .) Per tant, cada vèrtex del graf d'intersecció té grau parell si i només si el nombre de lletres entre cada parell de lletres del mateix símbol és parell.

*Les condicions (a') i (b') sobre  $\omega$  impliquen que  $\omega$  és realitzable al pla.* Un cop hem vist l'equivalència entre els dos parells de condicions, resta veure la implicació que manca. La paraula  $\omega' = \omega_n$  s'ha obtingut de  $\omega = \omega_0$  capgirant successivament les lletres entre les ocurrencies de  $s_1, \dots, s_n$ . En general, denotem per  $\omega_i$  la paraula obtinguda de  $\omega_0$  capgirant les lletres (aplicant l'operació de desfer punts de tall (iii)) entre  $s_1, \dots, s_i$ . L'estratègia consisteix a, partint d'una immersió plana del diagrama de cordes de  $\omega' = \omega_n$ , que denotem per  $X' = X_n$ , refer els punts de tall corresponents a  $s_n, \dots, s_1$  en ordre invers a com hem tractat els símbols a  $\omega$ , fins a obtenir una corba al pla. Cal veure, doncs, que, per a cada  $i = n, n - 1, \dots, 1$ , si hem refet els punts de tall  $s_n, \dots, s_{i+1}$ , aleshores podem refer el tall  $s_i$ .

Denotem per  $X_i$  el diagrama de cordes de  $\omega_i$ . Denotem per  $M_i, i = n, n - 1, \dots, 1, 0$ , el mapa obtingut de refer el tall  $s_{i+1}$  a  $M_{i+1}$ . En particular,  $M_n$  és el mapa associat al diagrama de cordes  $X_n$ . La taula 1 (parcialment il·lustrada a la figura 11) resumeix els diferents tipus de talls entre les cordes relacionades amb  $s_{i+1}$  i dues cordes genèriques  $s_t$  i  $s_j$  abans i després d'aplicar (iii): si  $s_j$  i  $s_{i+1}$  no es tallen, aleshores la relació de tall entre  $s_j$  i  $s_t$  no canvia en capgirar  $s_{i+1}$ ; si  $s_j$  i  $s_{i+1}$  es tallen, aleshores  $s_j$  i  $s_t$  canvien el seu estat de tall segons si  $s_t$  talla  $s_{j+1}$  o no. De la taula 1 en deduirem les afirmacions (2), (3), (4) descrites més avall.

Tall $(s_j, s_{i+1})$ a $X_i$ i $X_{i+1}$	Tall $(s_t, s_{i+1})$ a $X_i$	Tall $(s_t, s_j)$ a $X_i$	$\Rightarrow$	Tall $(s_t, s_{i+1})$ a $X_{i+1}$	Tall $(s_t, s_j)$ a $X_{i+1}$
$s_j$ talla $s_{i+1}$	$i$ $s_t$ talla $s_{i+1}$	$i$ $s_t$ talla $s_j$	$\Rightarrow$	$s_t$ talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$
	$s_t$ talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$		$s_t$ talla $s_{i+1}$	$i$ $s_t$ talla $s_j$
	$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ talla $s_j$		$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ talla $s_j$
	$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$		$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$
$s_j$ no talla $s_{i+1}$	$i$ $s_t$ talla $s_{i+1}$	$i$ $s_t$ talla $s_j$	$\Rightarrow$	$s_t$ talla $s_{i+1}$	$s_t$ talla $s_j$
	$s_t$ talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$		$s_t$ talla $s_{i+1}$	$i$ $s_t$ no talla $s_j$
	$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ talla $s_j$		$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ talla $s_j$
	$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$		$s_t$ no talla $s_{i+1}$	$s_t$ no talla $s_j$

TAULA 1: Taula resum de l'efecte de desfer el punt de tall  $s_{i+1}$  de  $X_i$  a  $X_{i+1}$ .

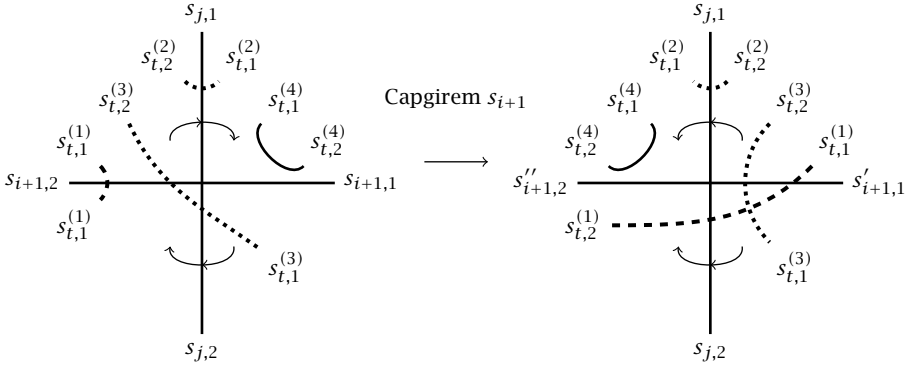


FIGURA 11: Il·lustració de la taula 1.

$$\left. \begin{array}{l} \text{A } X_i, \text{ l'aresta } s_{i+1} \text{ es talla amb} \\ \text{un nombre parell d'arestes d'entre } \{s_{i+2}, \dots, s_n\}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Veurem (2) mitjançant un argument inductiu en  $i$  més restrictiu: tot  $s_j$  amb  $j \geq i + 1$  talla un nombre parell d'arestes d'entre  $\{s_{i+2}, \dots, s_n\}$  a  $X_i$ . El cas  $i = 0$  és cert per la condició de Gauss. Suposem, doncs, que  $s_j$  talla un nombre parell d'arestes a  $\{s_{i+1}, \dots, s_n\}$  al diagrama de cordes  $X_i$  de  $\omega_i$  i dividim l'argument en dos petits casos:

Si  $s_j$  no talla  $s_{i+1}$ , aleshores, usant la taula 1,  $s_j$  talla  $s_t$  amb  $t \geq i + 2$  a  $X_{i+1}$  si i només si  $s_j$  talla  $s_t$  a  $X_i$ . La hipòtesi d'inducció fa la resta.

Si  $s_j$  talla  $s_{i+1}$ , aleshores  $S$  denota el conjunt d'arestes d'entre  $\{s_{i+2}, \dots, s_n\} \setminus \{s_j\}$  que talla  $s_{i+1}$ . De la hipòtesi d'inducció deduïm que un nombre parell d'arestes d'entre  $\{s_{i+2}, \dots, s_n\}$  talla  $s_{i+1}$ . Per tant,  $|S|$  és senar. Per la taula 1, la paritat del conjunt d'arestes d'entre  $S$  que talla a  $s_j$  a  $X_i$  i a  $X_{i+1}$  és diferent. Això darrer, afegit al fet que les arestes que talla  $s_j$  d'entre  $\{s_{i+2}, \dots, s_n\} \setminus \{s_j\} \setminus S$  és el mateix a  $X_i$  i a  $X_{i+1}$ , que  $s_j$  talla  $s_{i+1}$ , i que hi ha un nombre parell d'arestes que tallen  $s_j$  d'entre  $\{s_{i+1}, \dots, s_n\}$  a  $X_i$  (per la hipòtesi d'inducció), fa que el nombre d'arestes que tallen  $s_j$  d'entre  $\{s_{i+2}, \dots, s_n\}$  a  $X_{i+1}$  sigui també parell.

Resseguint l'argument de (2) veiem també (3) i (4).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } s_j \text{ no talla } s_{i+1} \text{ al diagrama de cordes } X_i \text{ de } \omega_i, \\ \text{aleshores la paritat del nombre de tall de } s_j \text{ amb} \\ \text{les arestes } \{s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_n\} \text{ a } X_i \text{ és el mateix que} \\ \text{la paritat del nombre de tall entre } s_j \text{ amb} \\ \text{les arestes } \{s_{i+2}, \dots, s_n\} \text{ a } X_{i+1}. \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } s_j \text{ talla } s_{i+1} \text{ al diagrama de cordes } X_i \text{ de } \omega_i, \text{ i } j < i + 1, \\ \text{aleshores la paritat del nombre de tall de } s_j \text{ amb} \\ \text{les arestes } \{s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_n\} \text{ a } X_i \text{ és diferent de} \\ \text{la paritat del nombre de tall entre } s_j \text{ amb} \\ \text{les arestes } \{s_{i+2}, \dots, s_n\} \text{ a } X_{i+1}. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Començant a refer els talls a  $X_n$  de  $\omega_n = \omega'$  observem que, si podem refer i refem el tall  $s_j$ , i l'aresta de  $s_i$  talla la de  $s_j$  amb  $i < j$  a  $X_j$ , aleshores el sentit relatiu entre les branques de la corba a  $s'_i$  i  $s''_i$  canvia. Alhora, la paritat del nombre d'arestes que  $s_i$  talla a  $X_{j-1}$  d'entre  $\{s_j, \dots, s_n\}$  canvia respecte del nombre d'arestes d'entre  $\{s_{j+1}, \dots, s_n\}$  que  $s_i$  talla a  $X_j$ . Com que comencem amb un nombre parell de talls, 0, els sentits són oposats per a tots els  $s_i$  (comencem amb una corba tancada sense talls al pla), i canviem de paritat un nombre parell de cops (el nombre de talls de  $s_i$  a  $X_i$  entre  $\{s_{i+1}, \dots, s_n\}$  és parell), el nombre de canvis de sentit és parell i, per tant, com que hem començat amb orientacions oposades, quan volem refer el tall  $s_i$  aquest tindrà orientacions oposades. Per tant, podrem refer tots els talls i obtenim una representació de  $\omega_0 = \omega$  al pla. Això conclou la demostració.  $\square$

Si volem implementar un algoritme de reconeixement i/o construcció de la representació plana hem de:

- Veure si la condició de Gauss es compleix.
- Capgirar les lletres entre les parelles de símbols per obtenir  $\omega'$ .
- Determinar si el diagrama de cordes de  $\omega'$  és planar.

El primer punt es pot determinar en temps lineal recurrent  $\omega$  un cop tot portant el compte del nombre d'elements entre cada parell de lletres. Trobar el diagrama de cordes de  $\omega'$  es pot aconseguir en temps lineal en el nombre de símbols, així com determinar-ne la planaritat (podem usar el resultat general de Hopcroft i Tarjan [23]). Ara bé, capgirar les lletres entre totes les parelles de símbols pot tenir, en general, un cost quadràtic en el nombre de símbols. Tot i això, tal com s'explica a Rosenstiehl i Tarjan [33], es pot modificar lleugerament l'algoritme que es dedueix de la caracterització per tal d'obtenir la construcció de la representació plana en temps lineal en el nombre de símbols.<sup>9</sup>

## 5 Girant la segona cantonada

En aquesta secció veurem que també podem usar el resultat de processar tots els punts de tall usant (ii) per tal de caracteritzar els codis i paràgrafs de Gauss realitzables al pla.

### 5.1 Cercles de Seifert i propietats

DEFINICIÓ 9 (CERCLES DE SEIFERT). Sigui  $\omega$  un codi o paràgraf de Gauss i  $\Omega$  el seu graf enriquit. Aleshores la seqüència cíclica d'arestes dirigides  $(e_1, \dots, e_t)$  és un *cercle de Seifert* de  $\omega$  si

- $(e_1, \dots, e_t)$  forma un cicle dirigit i tancat a  $\Omega$ . És a dir,  $e_i = (v_i, v_{i+1 \pmod{t}})$ , amb  $i \in [t]$ .

<sup>9</sup> Rosenstiehl i Tarjan [33] també donen un algoritme específic per veure la planaritat d'un diagrama de cordes que resulta més senzill que el general de Hopcroft i Tarjan [23].

- Per a cada  $i$ , l'aresta

$$e_{i+1 \pmod t} = (v_i, v_{i+1 \pmod t})$$

és l'aresta que no segueix

$$e_i = (v_{i-1 \pmod t}, v_i)$$

en el camí induït per  $\omega$ .

Alternativament,

- La seqüència de símbols de  $\omega$  en ordre cíclic  $(s_1, \dots, s_t)$  forma un cercle de Seifert  $C_i$  si  $s_i$  és el següent vèrtex després d'usar (ii) per resoldre el punt de tall  $s_{i-1}$ .

EXEMPLE 10. Els cercles de Seifert del codi de Gauss de la figura 12 són les seqüències d'arestes

$$\begin{cases} ((a, b), (b, a)), \\ ((b, c), (c, a), (a, d), (d, b)), \\ ((c, d), (d, c)), \end{cases}$$

o les seqüències de vèrtexs

$$\begin{cases} a b, \\ a d b c, \\ c d. \end{cases}$$

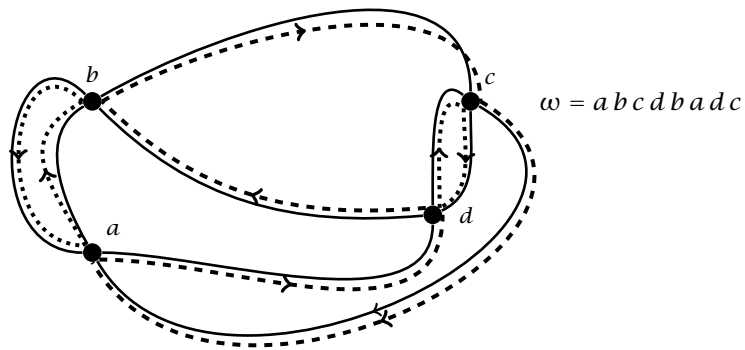


FIGURA 12: Corba representable al pla.

Observem que la següent aresta a cada cercle de Seifert està definida de manera única si el graf prové d'un codi o paràgraf de Gauss no signat. Per tant, els cercles de Seifert descomponen les arestes del graf de  $\omega$  en cicles dirigits tancats  $C_1, \dots, C_r$ . Denotem per  $C$  el conjunt de cercles de Seifert.

DEFINICIÓ 11 (GRAF I MAPA DE SEIFERT D'UN PARÀGRAF DE GAUSS). Sigui  $\Omega$  el graf enriquit d'un codi (o paràgraf) de Gauss  $\omega$ , aleshores  $\text{Sf}(\Omega) = \text{Sf}(\omega)$  és el *mapa de Seifert*  $M = (V, D)$  amb:

- $V(M)$  és el conjunt de cercles de Seifert,  $\{C_1, \dots, C_r\}$ .
- Hi ha un dard  $d$  per cada lletra de  $\omega$ . És a dir,  $|D| = 2n$ . Dos dards formen una aresta si les respectives lletres comparteixen símbol.
- Si el cercle  $C_i$  està format per l'ordre cíclic de lletres  $(l_1, \dots, l_t)$ , aleshores el dard  $d_{l_j}$  associat a la lletra  $l_j$ ,  $j \in \{1, \dots, t\}$ , és incident al vèrtex  $C_i$  i l'ordre cíclic dels dards al voltant de  $C_i$  és  $(d_{l_1}, \dots, d_{l_t})$ .

Una signatura  $\omega^+$  de

$$\omega = \dots l_1 l_0 l_2 \dots l_3 l'_0 l_4 \dots,$$

on  $l_0$  i  $l'_0$  tenen el mateix símbol  $s_0$ , orienta les arestes de  $\text{Sf}(\omega)$  de la manera següent (vegeu la figura 14 per al cercle de Seifert i la figura 2 per al signe/orientació del punt de tall):

- Si  $\omega^+$  signa  $s_0$  positivament (+), aleshores l'aresta de  $s_0$  va de  $C_1$  a  $C_2$ .
- Si  $\omega^+$  signa  $s_0$  negativament (-), aleshores l'aresta de  $s_0$  va de  $C_2$  a  $C_1$ .

Vegeu la figura 13 com un exemple d'un mapa de Seifert d'un codi de Gauss.

$$C(\omega) = \{\{a, b\}, \{a, d, b, c\}, \{c, d\}\}$$

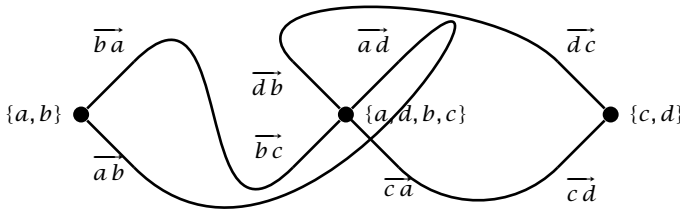


FIGURA 13: Mapa de Seifert de  $\omega = a b c d b a d c$ .

DEFINICIÓ 12 (MAPA VÈRTEX MEDIAL). Si  $M$  és un mapa orientat per  $\sigma$ , aleshores  $\text{Mv}(M, \sigma)$ , o el *mapa vèrtex medial* és un mapa orientat 4-regular amb:

- Els vèrtexs de  $\text{Mv}(M, \sigma)$  són les arestes de  $M$ .
- Les arestes de  $\text{Mv}$  són les cordes entre els dards de  $M$  seguint la rotació  $\tau$ . Això és:

Per cada dard  $d$  de  $M$ ,  $\text{Mv}(M, \sigma)$  té dos dards:  $d^-$  i  $d^+$ , el de sortida de  $d$  i el d'entrada a  $d$ .

Els dards de sortida estan orientats amb  $-$  i els d'entrada amb  $+$  a  $\text{Mv}(M, \sigma)$ .

El dard  $d^-$  està aparellat amb el d'entrada a  $\tau(d)$ :  $\iota_{\text{Mv}(M, \sigma)}(d^-) = \tau_M(d)^+$ .



- Si  $\{d_1, \iota(d_1) = d_2\}$  és una aresta de  $M$  amb  $\sigma(d_1) = -1$  i  $\sigma(d_2) = +1$  (orientada de  $d_1$  a  $d_2$ ), aleshores el vèrtex associat a  $\{d_1, d_2\}$  a  $Mv$  té la rotació

$$([\tau^{-1}(d_2)]^+, [\tau^{-1}(d_1)]^+, [\tau(d_1)]^-, [\tau(d_2)]^-),$$

i si  $\sigma(d_1) = +1$  i  $\sigma(d_2) = -1$ , aleshores  $Mv$  té la rotació

$$([\tau^{-1}(d_1)]^+, [\tau^{-1}(d_2)]^+, [\tau(d_2)]^-, [\tau(d_1)]^-).$$

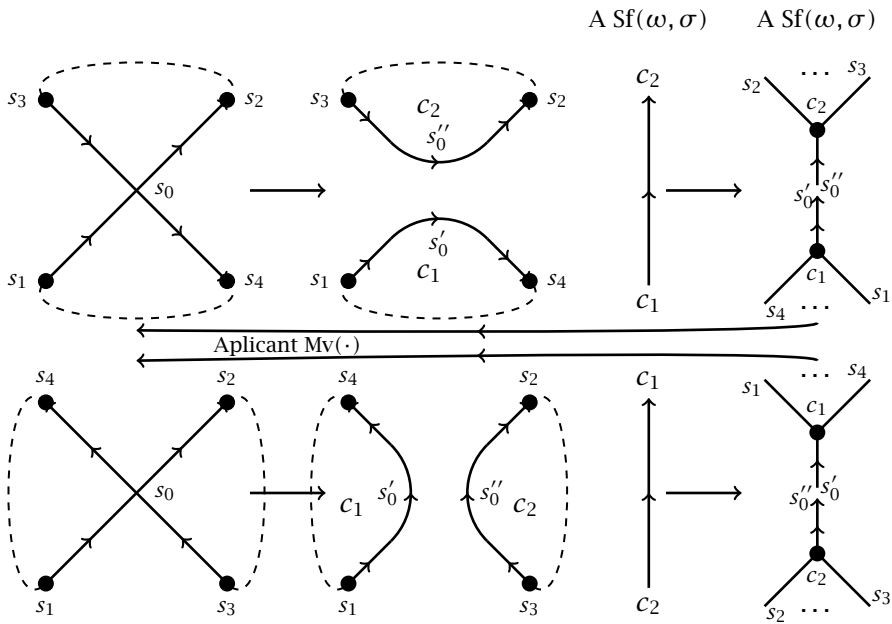


FIGURA 14: Construcció del graf vèrtex medial i mapa de Seifert.

OBSERVACIÓ 13. Sigui  $\omega$  un paràgraf de Gauss. A la figura 14 podem observar com l'operació vèrtex medial és la inversa de l'obtenció d'un mapa de Seifert orientat a partir d'una signatura de  $\omega$ .

Així, donar una orientació a les arestes del mapa de Seifert de  $\omega$  és equivalent a donar una signatura de  $\omega$  i tenim la següent reformulació de la qüestió 1:

QÜESTIÓ 3. Si  $\omega$  és un paràgraf de Gauss, existeix una orientació de les arestes del mapa de Seifert de  $\omega$  tal que indueix una signatura a  $\omega$  que el converteix en un mapa pla?

Vegem algunes propietats dels cercles de Seifert.

PROPOSICIÓ 14. *Sigui  $\omega$  un paràgraf de Gauss realitzable al pla, i sigui  $\Omega$  un mapa orientat pla que realitza  $\omega$ . Suposem que el pla està orientat. Aleshores:*

- (a) *Qualsevol cercle de Seifert  $c$  de  $\Omega$  és una corba tancada al pla sense autointerseccions. L'orientació de les arestes de  $\Omega$  els dona una orientació. En particular,  $c$  té l'orientació horària o antihorària (respecte de l'orientació del pla).*
- (b) *Dos cercles de Seifert s'intersequen, sense travessar-se (tangencialment, besant-se), als vèrtexs de  $\Omega$ /punts de tall de  $\omega$ .*
- (c) *A cada vèrtex de  $\Omega$ /punt de tall de  $\omega$  hi conflueixen dos cercles de Seifert, i són diferents.*
- (d) *Siguin  $c_1, c_2$  els dos cercles de Seifert de  $\Omega$  que es toquen a  $v$ . Siguin  $c_1^+$  i  $c_2^+$  els dards de  $\Omega$  que van cap a  $v$  de  $c_1$  i  $c_2$  respectivament. Denotem per  $c_1^-$  and  $c_2^-$  els dards que deixen  $v$  de  $c_1$  i  $c_2$  respectivament. Aleshores tenim les següents situacions relatives entre la contenció de  $c_1, c_2$  i les seves orientacions:*

Interior/Exterior	$\Rightarrow$ Orientació de $c_1$	$\Rightarrow$ Orientació de $c_2$	$\Rightarrow$ Rotació de $v$ a $\Omega$	$\Rightarrow$ Orientació de l'aresta $v$ a $Sf(\Omega)$
$c_1$ a l'interior de $c_2$	antihorària	antihorària	$(c_1^+, c_2^+, c_2^-, c_1^-)$	de $c_2$ a $c_1$
$c_1$ a l'interior de $c_2$	horària	horària	$(c_2^+, c_1^+, c_1^-, c_2^-)$	de $c_1$ a $c_2$
$c_1$ a l'exterior de $c_2$	antihorària	horària	$(c_1^+, c_2^+, c_2^-, c_1^-)$	de $c_2$ a $c_1$
$c_1$ a l'exterior de $c_2$	horària	antihorària	$(c_2^+, c_1^+, c_1^-, c_2^-)$	de $c_1$ a $c_2$

TAULA 2

- (e) *Cada cercle de Seifert que no és vèrtex de tall al mapa de Seifert de  $\omega$  és una cara (possiblement la cara exterior) del mapa  $\Omega$ .*

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 14. Per la definició dels cercles de Seifert i del mapa  $\Omega$  (en tot mapa, dues arestes mai es tallen sobre la superfície que el mapa defineix, en aquest cas el pla), la intersecció entre dos cercles de Seifert només es pot donar als punts de tall de  $\omega$ .

Cada cercle de Seifert s'obté de prendre la següent aresta del cycle com la que, sortint del punt de tall, no és la que segueix la direcció «tot recte». Per tant, el cercle de Seifert aparella les quatre arestes concurrents a un punt de tall de tal manera que les direccions concurrents no s'intersequen; els camins dels cercles es toquen al punt de tall sense tallar-se. Podem dir que els cercles es repelleixen en trobar-se en un punt de tall. En particular, dos cercles de Seifert no es tallen entre ells. Això demostra (b) i la primera part de (c).

Adicionalment, un cercle de Seifert no es talla amb si mateix. Efectivament, si un cercle de Seifert s'autointersequés, aleshores per l'argument precedent hi hauria una corba més curta continguda a  $c$  que separaria el cercle  $c$  en dues parts (ja que el nombre total de punts de tall de  $\omega$  és finit). Això contradia el fet que dos trams de cercles de Seifert, al pla, reboten per localment allunyar-se en arribar als punts d'intersecció. Això demostra (a) i la segona meitat de (c).

Com que cada cercle de Seifert de  $\Omega$  és una corba tancada que no s'autointersecta al pla, aquest defineix una cara exterior i una cara interior (pel teorema de la corba tancada de Jordan). Com que dos cercles de Seifert no es travessen, podem determinar el seu conteniment relatiu (si  $c_1$  té un punt a la cara interior de  $c_2$ , aleshores diem que  $c_1$  és a l'interior de  $c_2$ , altrament  $c_1$  és a l'exterior de  $c_2$ ).

Si  $c_1$  i  $c_2$  comparteixen un punt de tall de  $\omega$ , aleshores la relació *estar a l'interior/exterior*, juntament amb l'orientació horària/antihorària d'un d'ells, determina l'orientació de l'altre. El motiu és que les direccions són concurrents en el punt de contacte com dos engranatges. Les relacions estan donades a la taula de l'apartat (d) de la proposició. Vegeu també la figura 17 per a un exemple o la figura 15.

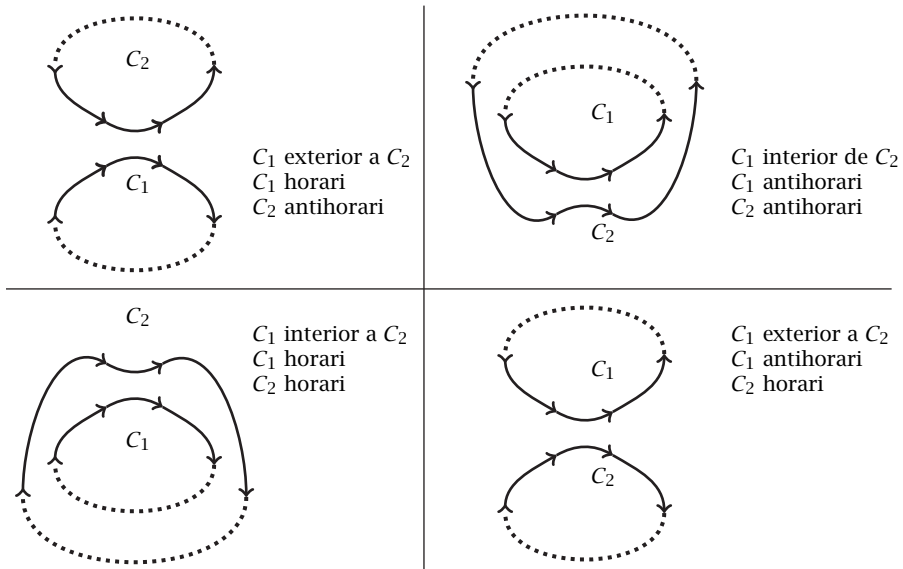


FIGURA 15: Cicles de Seifert: conteniment relatiu i orientació.

Com ja hem dit, cada cercle de Seifert de  $\Omega$  indueix una regió interior i una d'exterior del pla. Si no hi ha cap altre punt de  $\Omega$  (vèrtex o aresta) en alguna d'aquestes regions, aleshores la regió en qüestió és una cara de  $\Omega$ . Si suposem que  $c_1$  no defineix una cara (en alguna de les dues regions en què divideix el pla), aleshores hi ha una aresta de  $\Omega$  en cadascuna d'aquestes regions. En particular, cadascuna d'aquestes arestes pertanyerà a un cercle de Seifert. Denotem per  $c_2$  el cercle de Seifert a l'interior de  $c_1$  i  $c_3$  el cercle de Seifert de la regió exterior de  $c_1$ . Qualsevol camí per punts de  $\Omega$  entre un punt de  $\Omega$  a l'interior de  $c_1$  i un punt de  $\Omega$  a l'exterior de  $c_1$  involucra una aresta de  $c_1$  a  $\Omega$ . Efectivament,  $c_1$  forma una corba tancada sense autointerseccions; si volem anar de l'interior a l'exterior l'hem d'intersecar. En un mapa, dues arestes només s'intersequen als vèrtexs. Així, per anar d'un punt de l'interior de  $c_1$  a l'exterior de  $c_1$  a  $\Omega$  cal passar per un vèrtex de  $c_1$ . Cada vèrtex de  $c_1$  és

una intersecció de dos cercles de Seifert, un és  $c_1$  i l'altre és o bé a l'interior o bé a l'exterior de  $c_1$ . Així, si el camí comença a l'interior i arriba a  $c_1$ , o bé pren una aresta de  $c_2$  o bé continua a l'interior de  $c_1$ . Cada camí a  $\Omega$  indueix un camí a  $Sf(\omega)$  i viceversa. Si usem una aresta a  $\Omega$ , aleshores usem el vèrtex corresponent al seu cercle de Seifert a  $Sf(\omega)$ . Si canviem de cercle de Seifert a  $\Omega$  ho hem de fer en un vèrtex on convergeixen els dos, de manera que podem usar una aresta entre els dos cercles de Seifert a  $Sf(\omega)$ . Així, qualsevol camí a  $\Omega$  entre dos punts a l'interior de les arestes que usa arestes dels cercles de Seifert  $\{c_4, \dots, c_t\}$  es tradueix en un camí a  $Sf(\omega)$  que passa pels vèrtexs  $\{c_4, \dots, c_t\}$ . A més, qualsevol camí a  $Sf(\omega)$  que passa pels vèrtexs  $Sf(\omega)$  indueix un camí a  $\Omega$  que usa arestes dels cercles de Seifert  $\{c_4, \dots, c_t\}$ . Per tant, com que qualsevol camí entre  $c_2$  i  $c_3$  a  $\Omega$  usa una aresta de  $c_1$ , qualsevol camí entre el vèrtex  $c_2$  i el vèrtex  $c_3$  a  $Sf(\omega)$  passa per  $c_1$ . A més, qualsevol camí entre  $c_2$  i  $c_3$  a  $Sf(\omega)$  es tradueix en un camí, a  $\Omega$ , entre un punt a l'interior d'una aresta de  $c_2$  i un punt a l'interior d'una aresta de  $c_3$  i aquest ha de passar per una aresta de  $c_1$ . Així,  $c_1$  és un vèrtex de tall a  $Sf(\omega)$ . Això demostra (e) i finalitza la prova.  $\square$

## 5.2 Procediment per orientar les arestes d'un mapa

En aquesta secció donem un procediment, denotat per  $\text{Alg}(\cdot)$ , que assigna orientacions a les arestes d'un mapa. La intenció és aplicar l'algoritme al mapa de Seifert d'un paràgraf de Gauss. Així, volem usar les relacions de la proposició 14, part (d) per tal de determinar el tipus de punt de tall usant els cercles de Seifert. Més concretament,  $\text{Alg}(\cdot)$  dona una orientació de les arestes mitjançant una bicoloració dels vèrtexs del mapa amb  $\{0, 1\}$ . Com queda reflectit a la taula 3, hom pot pensar que el color 1 assigna al cercle de Seifert l'orientació antihorària al pla.

### Algoritme $\text{Alg}(M)$ per assignar orientacions a les arestes d'un mapa $M$ .

1. Sigui  $M = (D; \tau, \iota)$  un mapa, on  $\tau$  denota la permutació que dona el sistema de rotacions i  $\iota$  és la involució entre els dards.

Si  $M$  no és connex, l'algoritme s'aplica a cada component connexa de manera separada.

Assignem un ordre total, arbitrari, als vèrtexs de  $M$  i als dards de  $M$ .

Si  $M$  no és bipartit, aleshores  $M$  no és el mapa de Seifert d'un paràgraf de Gauss.

2. Seleccionem  $v_0$ , un vèrtex que no sigui de tall al mapa. (En eliminar-lo no desconnectem el graf.)

Arrelem el mapa a  $v_0$  i acolorim  $v_0$  amb el color 1.

3. Considerem l'arbre de blocs 2-connexos de  $M$  (més concretament, del graf subjacent a  $M$ ) [6, proposició 3.1.2]. Els punts d'articulació de l'arbre són els punts de tall de  $M$ .

Arrelem el bloc de  $v_0$  a  $v_0$ .

L'arrel d'un bloc 2-connex  $B$  és el vèrtex de  $B$  que desconnecta la resta de  $B$  respecte a  $v_0$ , l'arrel del mapa  $M$ .

L'arrel d'una unió connexa de blocs 2-connexos  $\{B_1, \dots, B_s\}$  ve donada per l'arrel més propera a  $v_0$ ; això és, si  $v_i$  és el vèrtex arrel de  $B_i$ , aleshores l'arrel de  $\{B_1, \dots, B_s\}$  és el vèrtex  $v_i$  tal que  $d(v_i, v_0) = \min_{j \in [s]} d(v_j, v_0)$ .

4. Sigui  $v$  un vèrtex de  $M$  i siguin  $B'_0, B'_1, \dots, B'_k$  les components connexes a  $M \setminus \{v\}$ , i  $L_1, \dots, L_r$  els llaços de  $v$ .<sup>10</sup> Per a tot  $i \in [0, k]$ , denotem per  $B_i$  el graf induït per  $V(B'_i) \cup \{v\}$ , sense els llaços de  $v$ .  $B_0$  conté el vèrtex  $v_0$ . Siguin  $d_1, \dots, d_t$  els dards ordenats cíclicament de  $M$  incidents a  $v$ . Sigui  $S_v$  el graf que té  $\{d_1, \dots, d_t, B_0, B_1, \dots, B_k, L_1, \dots, L_r\}$  com a conjunt de vèrtexs. Com a arestes:  $B_i$  és adjacent a  $d_j$  si i només si l'aresta  $\{d_j, \iota(d_j)\}$  de  $M$  pertany a  $B_i$ . També connectem  $d_i$  amb  $d_{i+1}$ , índexs mòdul  $t$ , de tal manera que  $d_1, \dots, d_t$  forma un cicle.  $L_i$  és adjacent als vèrtexs  $d_j, d_{j'}$  si i només si  $L_i$  és el llaç  $\{d_j, d_{j'}\}$  a  $M$ .

Per a tot vèrtex  $v$ , que sigui de tall o que contingui llaços (és a dir, tot  $v$  tal que  $k \geq 1$  o bé  $r \geq 1$ ), o bé si  $v = v_0$ , decidirem si  $B \in \{B_0, B_1, \dots, B_k, L_1, \dots, L_r\}$  és *dins* de  $v$  o bé *fora* de  $v$  de la manera següent:

- (a) Si  $S_v$  és planar, sigui  $M_v$  una immersió plana de  $S_v$ . El cicle  $(d_1, \dots, d_t)$  a  $M_v$  determina dues cares al pla, la cara *exterior* i la cara *interior*. Un vèrtex de  $\{B_0, \dots, B_k, L_1, \dots, L_r\}$  és a *dins* de  $v$  si es troba a la cara interior, i és *fora* si es troba a la cara exterior.

Si  $v \neq v_0$ , aleshores  $B_0$  és a la cara exterior de  $M_v$ .

Si  $v = v_0$ , aleshores  $B_0$  és a la cara interior de  $M_{v_0}$ .

- (b) Si  $S_v$  no és planar, aleshores  $M$  no és un mapa de Seifert d'un paràgraf de Gauss realitzable al pla.

En aquest cas, denotem per  $D_v$  un dibuix pla de  $S_v$  amb el nombre mínim d'encreuaments entre les arestes de  $S_v$  amb la condició que les arestes del cicle  $d_1, \dots, d_t$  no es tallen dues a dues.<sup>11</sup>

De les dues cares induïdes per  $v$  a  $D_v$  (pel cicle  $d_1, \dots, d_t$ ), declarem que la cara que conté  $B_0$  és la cara exterior i que l'altra cara és la interior (llevat del cas que  $v = v_0$ , llavors  $B_0$  és a la cara interior).

5. Donat un bloc 2-connex  $B$  amb arrel  $v$ , ordenem els vèrtexs de  $B$  d'acord amb les distàncies a  $v$ . Sigui  $l(v)$  el color de  $v$ :

- (a) Si  $B$  és dins de  $v$ , aleshores acolorem els vèrtexs a distància  $i$  de  $v$  amb color  $l(v) + i + 1 \pmod 2$  (de tal manera que els veïns de  $v$  tenen el mateix color que  $v$ ).

- (b) Si  $B$  és fora de  $v$ , aleshores els vèrtexs a distància  $i$  de  $v$  reben el color  $l(v) + i \pmod 2$ .

- (c) El pare del vèrtex  $u$  a  $B$  és el mínim veí de  $v$  (en l'ordenació total que hem donat als vèrtexs) que és estrictament més proper a  $v_0$  que  $u$ .

<sup>10</sup> Els casos interessants són  $v = v_0$  o  $v$  un punt de tall, o que contingui llaços.

<sup>11</sup> Si només volem detectar si  $\omega$  és realitzable, prendrem qualsevol immersió que tingui la propietat respecte del cicle, però no cal un nombre mínim de punts d'encreuaments. Així mantindrem el cost lineal.

6. Orientem les arestes del vèrtex colorat 0 cap al vèrtex colorat 1 si els colors dels vèrtexs difereixen. (Si  $M$  és bipartit, aquesta orientació és independent del pare que haguem triat.)

Si l'aresta connecta dos vèrtexs amb la mateixa coloració, i els dos vèrtexs tenen la mateixa distància a  $v_0$ , aleshores el graf no és bipartit i orientem l'aresta del vèrtex més gran al més petit. Si un vèrtex és més proper a  $v_0$  que l'altre, aleshores són pare i fill i l'orientació de l'aresta ve donada pel color del fill: l'aresta va del fill al pare si el fill té el color 0 i del pare cap al fill si el fill té el color 1.

Orientem els llaços del dard menor al dard més gran, segons l'ordre total sobre els dards imposat al principi.

7. Retornem el mapa amb l'orientació sobre les arestes trobada.

### 5.3 Propietats de l'algoritme i caracterització

En aquesta secció veurem unes quantes propietats de l'algoritme juntament amb el resultat de caracterització usant els cercles de Seifert.

PROPOSICIÓ 15 (PROPIETATS DE  $\text{Alg}(\cdot)$ ). *Sigui  $M$  un mapa connex. Aleshores*

- (a)  $\text{Alg}(M)$  dona una orientació a les arestes de  $M$ .
- (b) *Siguin  $\{M_1, \dots, M_q\}$ , tots els possibles mapes orientats que  $\text{Alg}(M)$  dona com a sortida (per exemple, segons les diferents tries de mapa pla per a  $S_v$  al pas 4(a)). Suposem que el mapa obtingut usant la definició 12 a  $M_1$  és pla. Aleshores, usant la definició 12 a  $M_i$  obtenim un mapa pla per a tot  $i \in [q]$ .*
- (c) *L'algoritme té un cost d'operacions lineal en  $|E(M)| + |V(M)|$ .*

*Si  $\omega$  és un paràgraf de Gauss realitzable al pla i  $M = \text{Sf}(\omega)$ . Aleshores*

- (d)  $M$  és bipartit.
- (e) *Per a tot vèrtex de tall  $v$  de  $M$ ,  $S_v$  (definit al pas 4) és un graf planar.*

Les propietats de l'algoritme, proposició 15, les veurem a la subsecció 5.5. Primer enunciem i demostrem el teorema de caracterització, més algorítmic, següent.

TEOREMA 16 (CARACTERITZACIÓ ALGORÍTMICA DELS CODIS DE GAUSS AMB CERCLLES DE SEIFERT). *Sigui  $\omega$  un paràgraf de Gauss. Si  $\omega$  és realitzable al pla, aleshores:*

- (a) *L'algoritme  $\text{Alg}(\text{Sf}(\omega))$  dona una orientació de les arestes,  $\sigma$ , tal que  $\text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$  és un mapa pla.*
- (b) *Si recorrem les arestes del graf dirigit 4-regular  $\text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$  seguint l'aresta sortint que està «just davant» i registrem els vèrtexs pels quals passem, aleshores recuperem  $\omega$ . És a dir, el mapa  $\text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$  representa  $\omega$ .*

*Si  $\omega$  no és realitzable, aleshores el mapa  $\text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$  no és pla.*

*Hi ha un algoritme que, en temps lineal en el nombre símbols de  $\omega$ , respon si  $\omega$  és realitzable al pla o no. A més, dona una representació plana en cas afirmatiu.*

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 16. Per tal de veure (a) i (b) quan  $\omega$  és realitzable al pla, és suficient de veure (a). Efectivament, si tenim (a), aleshores  $Mv(Sf(\omega), \sigma)$  és una realització plana de  $\omega$  degut a la definició 12 i l'observació 13. Així doncs, vegem ara que, si  $\omega$  és realitzable al pla, aleshores (a) se satisfà.

Sigui  $\Omega$  el mapa induït per una representació plana de  $\omega$ . Com ja hem vist a l'observació 13, podem construir  $\Omega$  usant una orientació  $\sigma$  de les arestes de  $Sf(\omega)$ . Si veiem que l'orientació  $\sigma$  induïda per  $\Omega$  pot ser replicada per l'algoritme, la proposició 15, part (b) completa l'argument.

Per la darrera propietat de la proposició 14, qualsevol immersió plana que realitza  $\omega$  és tal que qualsevol vèrtex que no sigui de tall a  $Sf(\omega)$  és una cara. En particular, podem escollir una immersió plana que realitza  $\omega$ , denotada per  $\Omega$ , de tal manera que el vèrtex que no és de tall  $v_0$  triat per l'algoritme és una cara exterior de  $\Omega$  i està orientat antihoràriament (seguint l'orientació de les arestes de  $\Omega$ ).

La planaritat de  $\Omega$  indueix una orientació horària/antihorària als cercles de Seifert (segons l'orientació de les arestes induïda per  $\omega$  i l'orientació positiva del pla), i una relació d'interior/exterior entre dos cercles de Seifert, pel fet de ser corbes tancades al pla que no es tallen entre elles. Usant la part (e) de la proposició 14,  $S_v$  és un graf planar per a tot vèrtex de tall  $v$  de  $Sf(\omega)$ . Encara més; per la segona part de l'afirmació 1, juntament amb l'argument just posterior a la prova de l'afirmació 1, podem concloure que  $\Omega$  indueix un mapa pla per a tots els  $S_v$ , on  $v$  és un vèrtex de tall de  $Sf(\omega)$  o  $v = v_0$ . Llavors, tenim les següents relacions entre  $\Omega$ ,  $Sf(\omega)$  i els mapes plans induïts per  $\Omega$  a  $S_v$ :

1. Si  $c$  és un cercle de Seifert que comparteix un punt de tall amb  $v$  a  $\omega$  ( $v$  i  $c$  són adjacents a  $Sf(\omega)$ ), i  $c$  és a l'interior/exterior de  $v$  a  $\Omega$ , aleshores  $c$  és a l'interior/exterior de  $v$  a la immersió plana de  $S_v$  induïda per  $\Omega$ . Aquest fet es pot veure a través dels arguments de l'afirmació 1.

Això també succeeix amb la unió de blocs 2-connexos que conté  $c$ ,  $B_c$ , a  $Sf(\omega) \setminus v$ : tots els cercles de  $B_c \setminus v$  són a l'interior/exterior de  $v$  a  $\Omega$  si i només si són a l'interior/exterior de  $v$  a  $S_v$ .

2. Tots els cercles són a l'interior de  $v_0$ . Això passa a tot  $S_v$  i també a  $\Omega$  ja que  $v_0$  defineix la cara exterior de  $\Omega$ .
3. Si dos cercles de Seifert adjacents a  $Sf(\omega)$  pertanyen al mateix bloc 2-connex de  $Sf(\omega)$ , i cap d'ells és el cercle més proper a  $v_0$  del bloc 2-connex, aleshores cadascun és a l'exterior de l'altre a  $\Omega$ .

Altrament, podem usar un argument similar al de l'última part de la proposició 14 afegint el fet que  $v_0$  és a l'exterior de tots els cercles de Seifert.

Amb aquests fets veiem que la relació interior/exterior a  $\Omega$  de dos cercles de Seifert adjacents queda ben reflectida als mapes plans dels  $S_v$  de  $Sf(\omega)$  que  $\Omega$  indueix: o bé en sabem informació directa pel fet de ser veí d'un punt de tall, o bé en propaguem la informació a través del bloc 2-connex sabent que són exteriors dos a dos.

Amb aquests fets, vegem inductivament que la coloració induïda per l'algoritme és tal que

$c$  té l'orientació horària/antihorària a  $\Omega$   
si i només si l'algoritme acoloreix  $c$  amb el color 0/1.

Aquesta condició és certa per a  $v_0$ . Suposem que  $v$  té aquesta propietat i vegem què podem dir de  $S_v$ . Si  $c$  és veí de  $v$ , aleshores usem les parts 1 i 2 anteriors per obtenir la taula 3; a la cinquena columna veiem que l'algoritme  $\text{Alg}(\text{Sf}(\omega))$  produeix l'ordenació de les arestes al mapa dirigit  $\text{Sf}(\omega)$  coincident amb la que indueix  $\Omega$  via definició 11.

Or. $v$ a $\Omega$ /Color. de $v$ per $\text{Alg}()$	$c$ int./ext. a $v$ a $\Omega/S_v$	$\Rightarrow$ Or. de $c$ a $\Omega$	Coloració de $c$ per $\text{Alg}()$	$\Rightarrow$ Or. $\{c, v\}$ a $\text{Sf}(\omega)$
antihorària /1	$c$ a l'interior de $v$	$c$ antihorària	1	de $v$ a $c$
antihorària /1	$c$ a l'exterior de $v$	$c$ horària	0	de $c$ a $v$
horària /0	$c$ a l'interior de $v$	$c$ horària	0	de $c$ a $v$
horària /0	$c$ a l'exterior de $v$	$c$ antihorària	1	de $v$ a $c$

TAULA 3: La primera columna i la segona impliquen la tercera i la quarta. La primera i la quarta, juntament amb el fet que  $v$  és el pare de  $c$ , impliquen la cinquena.

Si usem la part 3 concloem que la coloració a la resta de blocs 2-connexos també és la correcta ja que la coloració es propaga, canviant el color, segons la distància creixent a  $v$  sabent que el vèrtex sempre és exterior a un de ja acolorit que no és  $v$ . Observem que en aquests casos els colors són diferents entre les arestes i, per tant, no cal usar el desempat pare/fill a l'hora de decidir la direcció de l'aresta.

En aquest punt notem que això demostra la proposició 15, part (d). Efectivament, la coloració alternada segons la distància dins de la component 2-connexa, deixant de banda  $v$ , està ben definida degut al fet que dos cercles, llevat de  $v$ , han de ser mútuament exteriors; aquest fet implica que l'orientació dels cicles s'alterna segons la paritat de la distància amb  $v$ . A aquest fet hem d'afegir que tots els veïns de  $v$  del mateix bloc 2-connex són a la mateixa banda i, per tant, tots tenen la mateixa orientació, cosa que fa que el bloc sigui bipartit. Si tots els blocs 2-connexos són bipartits, aleshores el graf també ho és.

Així doncs, l'argument inductiu esbossat al paràgraf anterior ens mostra que hi ha una orientació  $\sigma$  de les arestes de  $\text{Sf}(\omega)$  que l'algoritme pot donar com a resposta, i que és tal que  $\Omega = \text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$ . Això finalitza l'argument de la implicació d'esquerra a dreta.

$\text{Alg}(\omega)$  dona una orientació de les arestes de  $\text{Sf}(\omega)$  per la proposició 15. L'observació 13 ens permet concloure que per a tota orientació  $\sigma$  de les arestes de  $\text{Sf}(\omega)$ ,  $\text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$  dona una representació de  $\omega$  en alguna superfície. Si  $\Omega$  no és representable, aleshores cap  $\sigma$  farà que  $\text{Mv}(\text{Sf}(\omega), \sigma)$  sigui pla. Això conclou la segona part del teorema.



El cost d'obtenir  $Sf(\omega)$  a partir de  $\omega$  és lineal en el nombre de símbols de  $\omega$ . Usant la proposició 15, part (c), si  $\omega$  és realitzable al pla, l'algoritme aplicat a  $Sf(\omega)$  dona una orientació de les arestes  $\sigma$  en temps lineal en el nombre d'arestes. Això és el nombre de símbols de  $\omega$ . El mapa  $Mv(Sf(\omega), \sigma)$  es pot trobar en temps lineal al nombre d'arestes, que és lineal en  $|\omega|$ . Calcular el nombre de cares de  $Mv(Sf(\omega), \sigma)$  també és lineal en el nombre d'arestes i, per tant, podem donar una resposta afirmativa i donar una representació plana en temps lineal si  $\omega$  és representable.<sup>12</sup> L'algoritme es pot modificar lleugerament per donar, en cas que el graf  $S_v$  no sigui planar, un dibuix pla on el cicle  $v$  no té cap tall, i fer-ho en temps lineal en el nombre d'arestes de  $S_v$ . Així, usem la fórmula d'Euler per veure que el mapa  $Mv(Sf(\omega), \sigma)$  no és pla. Tot això ho podem fer en temps lineal en  $|\omega|$ .  $\square$

#### 5.4 Un altre resultat de caracterització

Si  $N$  és un mapa bipartit amb  $A$  i  $B$  com a conjunts de vèrtexs estables amb  $V(N) = A \sqcup B$ , aleshores diem que  $N'$  és el mapa *mig girat de  $N$*  si:

- La permutació cíclica dels dards al voltant dels vèrtexs  $v$  de  $B$  és  $\tau_v$  (la mateixa que a  $N$ ).
- La permutació dels dards al voltant dels vèrtexs  $v$  de  $A$  és  $\tau_v^{-1}$  (la inversa de la de  $N$ ).

Amb aquesta definició podem usar els resultats i arguments anteriors per obtenir la caracterització següent:

**TEOREMA 17 (CARACTERITZACIÓ DELS CODIS DE GAUSS USANT CERCLES DE SEIFERT).** *Sigui  $\omega$  un paràgraf de Gauss i  $M = Sf(\omega)$  el seu mapa de Seifert. Aleshores,*

*$\omega$  és un paràgraf de Gauss representable al pla*

*si i només si:*

- (a) *Per a tot  $v$ ,  $S_v$  definit al pas 4 de  $Alg(\cdot)$  és un graf planar.*
- (b) *El graf subjacent a  $M$  és bipartit.*
- (c) *Per a tot bloc 2-connex  $N$  de  $M$ , el mapa  $N'$ , obtingut després de mig girar el submapa  $N$ , és pla.*

**DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 17.** D'esquerra a dreta. Les parts (b) i (a) corresponen, respectivament, a les parts (d) i (e) de la proposició 15.

Per veure la part (c), usem  $Alg(\omega)$  per obtenir una representació plana de  $\omega$ . Denotem per  $\Omega$  aquesta representació. Observant la part 3 a la demostració del teorema 16, juntament amb la part (d) de la proposició 14 i la interpretació de la coloració  $\{0, 1\}$  de l'algoritme als cercles de Seifert (que coincideix amb l'orientació horària/antihorària usant la taula 3), tenim que els cercles de

---

<sup>12</sup> Hem suposat que, des del caràcter d'un paràgraf, podem accedir a totes les còpies del caràcter en temps constant, així com als seus veïnatsges de mida 4. Això també passa als mapes  $\iota$  i  $\tau$  d'un mapa a l'hora de calcular les cares o  $Mv(Sf(\omega), \sigma)$ .

Seifert a  $\Omega$  segueixen l'orientació horària/antihorària segons la coloració  $\{0, 1\}$  atorgada per  $\text{Alg}(\omega)$ . Denotem per  $\Omega_N$  el submapa de  $\Omega$  on hem eliminat els punts de tall de  $\omega$  no continguts en algun cercle de Seifert de  $N$  i totes les arestes de  $\Omega$  incidents a aquests vèrtexs. A  $\Omega_N$ , cada cercle de Seifert de  $N$  defineix una cara on no hi ha altres punts de tall de  $\Omega_N$  (aquí usem la part 3 de la demostració del teorema 16). Llavors, si posem un vèrtex a cada cara de  $\Omega_N$  definida per un cercle de Seifert de  $N$  i l'unim amb els punts de tall del corresponent cercle de Seifert sense crear punts de tall (per tal que el resultat sigui un altre mapa pla), obtenim un mapa pla  $\Omega'_N$  on els punts de tall originals tenen grau sis. Si a  $\Omega'_N$  eliminem les arestes de  $\Omega_N$ , aleshores obtenim un mapa pla  $\Omega''_N$  on els punts de tall de  $\omega$  tenen grau dos. Si a  $\Omega''_N$  convertim els camins que contenen els punts de tall de  $\omega$  (ara tenen ordre dos) en arestes, obtenim precisament el mapa mig girat de  $N$ , que és, doncs, pla.

A continuació demostrarem que (a) + (b) + (c) implica que  $\omega$  és realitzable al pla. Triem  $v_0$  un cercle de Seifert que no sigui un vèrtex de tall a  $M$ , el definim com a cara exterior, i donem mapes plans per tot  $S_v$  (els  $S_v$  són planars per (a) seguint les directrius de  $\text{Alg}(\cdot)$ ; això és, el vèrtex de  $S_v$  que conté  $v_0$  és a l'exterior de  $v$ ). Construïm el mapa que realitza  $\omega$  «enganxant» els mapes plans associats als mapes mig girats dels blocs 2-connexos; els enganxem seguint l'ordre proporcionat per la distància (a l'arbre de components 2-connexes de  $M$ ) entre el bloc en qüestió i el que conté  $v_0$ .

Assignem colors  $\{0, 1\}$  als vèrtexs seguint  $\text{Alg}(M)$ . Per (b) podem definir el mapa mig girat de cada bloc 2-connex  $N$ . Per (c) els mig girem i hi trobem el mapa pla  $N'$ . Denotem per  $N''$  el mapa creat a partir de  $N'$  subdividint les arestes de  $N'$ , afegint arestes dirigides segons l'orientació cíclica de les arestes al voltant dels vèrtexs de  $N$  entre els nous vèrtexs (cada vèrtex de  $N$  genera un cicle dirigit, el que serà el cercle de Seifert corresponent), i eliminant les arestes i els vèrtexs de  $N$ ; aquesta operació crea un nou mapa pla on cada cicle afegit defineix una cara on hi ha un únic vèrtex original de  $N$ .

A  $N''$  podem dibuixar els cicles de tal manera que segueixin l'orientació indicada per la coloració  $\{0, 1\}$  de  $\text{Alg}(\cdot)$ . Efectivament, tots els cicles que no són  $v$  o bé tenen tots la mateixa orientació antihorària/horària a  $N''$  i la 1/0 de  $\text{Alg}(\cdot)$ , o bé tots les tenen diferents (degut a (b), a l'operació de capgirar  $N$  cap a  $N'$ , i a la manera en què hem creat  $N''$  a partir de  $N'$ ). En cas que la tinguin diferent, podem «veure el pla des de sota» i això inverteix l'orientació horària/antihorària dels cercles. Finalment, si  $v$  té una orientació diferent a  $N''$  que l'assignada per l'algorisme, aleshores  $\text{Alg}(\omega)$  el colora igual que els seus veïns, i  $N$  és a l'interior de  $v$ . Així doncs, determinem que la cara associada a  $v$  és la cara exterior i modifiquem el dibuix de  $N''$  de manera que només canviï l'orientació horària/antihorària del cicle associat a  $v$  (ja que l'anterior cara exterior no estava associada a cap cercle de Seifert, usem  $v$  per «embolcallar» o encerclar la resta de  $N''$ ). Usem, doncs,  $v$  per «enganxar»  $N$  a la resta del mapa trobat anteriorment. Donat que  $S_v$  és planar, això no crea cap nou tall, i el mapa on el bloc 2-connex  $N$  s'ha afegit continua essent pla.

Així doncs, obtenim una representació plana de  $\omega$ . □

### 5.5 Demostració de la proposició 15

*Part (d).* L'hem vist a la demostració del teorema 16.

*Part (a).* L'algoritme assigna un vèrtex com a arrel del graf i un pare independentment de si  $M$  és bipartit o  $S_v$  és planar, per a tot  $v$ . L'orientació de cada aresta queda determinada per com hem triat l'arrel, pel color dels vèrtexs, i el color del pare.

*Part (e).* Usem l'afirmació següent:

**AFIRMACIÓ 1.** *Sigui  $\sigma$  una orientació de les arestes de  $M$ ,  $v$  un vèrtex de  $M$  i  $S_v$  el graf definit al pas 4. Si  $Mv(M, \sigma)$  és un mapa en una superfície orientable de gènere  $k$ , aleshores el graf  $S_v$  té gènere orientable  $\leq k$ .<sup>13</sup>*

*Adicionalment, si  $Mv(M, \sigma)$  és pla, aleshores  $Mv(M, \sigma)$  defineix un mapa pla per a qualsevol  $S_v$ .*

**DEMOSTRACIÓ DE L'AFIRMACIÓ 1.** Denotem per  $G_0$  el graf 4-regular subjacent al mapa orientat  $Mv(M, \sigma)$ , i denotem per  $(d_1, \dots, d_t)$  la rotació de dards associada a  $v$  a  $M$ . A  $G_0$  aquesta rotació associada a  $v$  indueix un circuit tancat format pel conjunt de vèrtexs ordenats  $(\{d_1, \iota(d_1)\}, \{d_2, \iota(d_2)\}, \dots, \{d_t, \iota(d_t)\})$  (són els vèrtexs corresponents als símbols d'un cercle de Seifert de  $\omega$ , i aquests són independents de la signatura de  $\omega$  per l'observació 13). Si  $v$  no té cap llaç, aleshores el circuit és un cicle en  $t$  vèrtexs.

Denotem per  $G_1$  el graf obtingut de  $G_0$  subdividint un cop l'aresta del circuit tancat induït per  $v$  a  $G_0$ : per a cada  $i \in [1, t]$ , índexs mòdul  $t$ , l'aresta de  $\{d_i, \iota(d_i)\}$  a  $\{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\}$  és substituïda per un camí de 3 vèrtexs  $(\{d_i, \iota(d_i)\}, u_i, \{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\})$ , on  $u_i$  és un nou vèrtex. Del mapa  $Mv(M, \sigma)$  obtenim  $Mv(M, \sigma)'$ , una immersió de  $G_1$  a la mateixa superfície que  $Mv(M, \sigma)$ , ja que podem considerar que el vèrtex  $u_i$  és un punt a l'aresta de  $\{d_i, \iota(d_i)\}$  a  $\{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\}$ .

Sigui  $G_2$  el graf derivat de  $G_1$  afegint l'aresta  $e_i$  entre  $u_i$  i  $u_{i+1}$  per a cada  $i \in [1, t]$ , índexs mòdul  $t$ . A  $Mv(M, \sigma)$ , l'aresta de  $\{d_i, \iota(d_i)\}$  a  $\{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\}$ , i l'aresta de  $\{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\}$  a  $\{d_{i+2}, \iota(d_{i+2})\}$  són consecutives a l'orientació cíclica al voltant del vèrtex  $\{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\}$  (vegeu la definició 12). Així doncs, són arestes consecutives en una cara de  $Mv(M, \sigma)$ . Això implica que podem afegir l'aresta  $e_i$  al mapa  $Mv(M, \sigma)'$  per tal de crear un mapa  $Mv(M, \sigma)''$  que és la immersió de  $G_2$  a la mateixa superfície que  $Mv(M, \sigma)$ . Conseqüentment, el gènere de  $G_2$  és com a màxim el gènere de  $Mv(M, \sigma)$ .

Denotem per  $G_3$  el graf obtingut d'eliminar, per a cada  $i \in [1, t]$ , l'aresta de  $u_i$  a  $\{d_{i+1}, \iota(d_{i+1})\}$  a  $G_2$ . Denotem per  $G_4$  el graf obtingut de  $G_3$  després de contraure totes les arestes no incidents als vèrtexs  $\{u_i\}_{i \in [1, t]}$ . Llavors tenim que  $S_v = G_4$ , i, per tant, podem immernir  $S_v$  a la mateixa superfície que  $Mv(M, \sigma)$

<sup>13</sup> El gènere d'un graf  $\Gamma$  és el mínim gènere d'una superfície orientable on  $\Gamma$  es pot immernir (per tant, sense talls entre les arestes) o, equivalentment, el mínim gènere entre la col·lecció de mapes que tenen  $\Gamma$  com a graf subjacent.

o alguna de gènere menor (ja que  $G_4$  és un menor de  $G_2$ ).<sup>14</sup> Això implica les dues parts de l’afirmació.  $\square$

Donat que les operacions  $Mv$  i  $Sf$  són invertibles per l’observació 13, el mapa pla  $\Omega$  del paràgraf de Gauss  $\omega$  induïx una orientació  $\sigma$  a les arestes de  $Sf(\omega)$  per la qual  $Mv(Sf(\omega), \sigma)$  és un mapa dirigit pla. Per tant, l’afirmació 1 demostra que tot  $S_v$  és un graf planar.

*Part (b).* És una prova bastant tècnica. Es pot trobar completa a [38, lema 3.3]. Podem resumir-la dient que podem, ordenadament, fer petits canvis a les immersions planes, que ens porten d’una immersió plana a l’altra. Els canvis venen indicats per les diferents immersions planes de  $S_v$ . Vegeu la figura 16 per observar la naturalesa dels canvis que fem i les conseqüències que tenen a  $Mv(Sf(\omega, \sigma))$ .

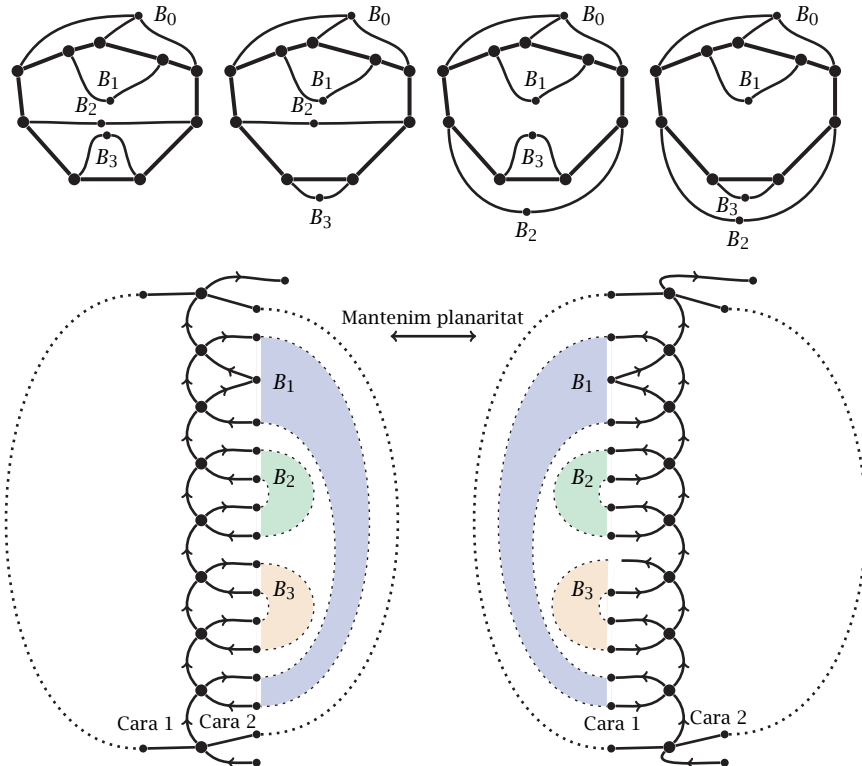


FIGURA 16: Dalt: diferents possibles immersions planes de  $S_v$  i com es transformen l’una en l’altra. Baix esquerra/dreta: representació amb  $B_1, B_2$  i  $B_3$  dins/fora de  $v$  a  $S_v$ .

<sup>14</sup> El graf  $G$  és un menor del graf  $H$  si podem obtenir  $G$  mitjançant una seqüència d’operacions d’eliminació d’arestes i de vèrtexs o de contracció d’arestes, les quals es poden dur a terme en un graf immers en una superfície sense augmentar-ne el gènere (vegeu [37, p. 463]).

Part (c). Assumim que podem construir una estructura de dades en la qual podem visitar un veí concret d'un vèrtex de  $M$  en temps constant. El nombre de components connexes de  $M$  es pot obtenir en temps lineal en el nombre de  $|V(M)| + |E(M)|$  usant una cerca en profunditat (vegeu, per exemple, el treball de Hopcroft i Tarjan [22, figura 1]). Donar un ordre total arbitrari a les arestes i vèrtexs de  $M$  ho podem fer en un nombre lineal d'operacions en  $|E(M)| + |V(M)|$ . Comprovar que el graf és bipartit també té un cost lineal ja que el nombre d'arestes és lineal. El càlcul de la descomposició en blocs 2-connexos de  $M$ , així com el conjunt de punts de tall, es pot realitzar en temps lineal en el nombre de  $|V(M)| + |E(M)|$  (vegeu Hopcroft i Tarjan [22, figura 2]).

Sigui  $W = \sqcup_v$  de tall a  $M$  o  $v_0 V(S_v)$  el conjunt de tots els vèrtexs de  $S_v$ . Cada aresta de  $M$  genera, com a molt, dos vèrtexs a  $W$ . Usem [23] per determinar si cada  $S_v$  és planar i trobar-ne una immersió en temps lineal en  $|W|$ . Si algun  $S_v$  no és planar, usem (e) per determinar que  $\omega$  no és representable al pla i l'algoritme acaba en temps lineal. Si tot  $S_v$  és pla, en tenim immersions planes en temps lineal en  $|E(M)|$ , això assigna un pare a cada vèrtex de  $M$  i l'orientació de les arestes de  $M$  en temps lineal; amb aquesta orientació  $\sigma$  trobem el mapa orientat  $Mv(M, \sigma)$  (que representa  $\omega$ ) i en determinem la seva planaritat en temps lineal. Usant (b), (c) i la primera part del teorema 16, si  $\omega$  és representable al pla,  $Mv(M, \sigma)$  és pla i l'algoritme dona una representació plana de  $\omega$  en temps lineal en  $|E(M)| + |V(M)|$ .

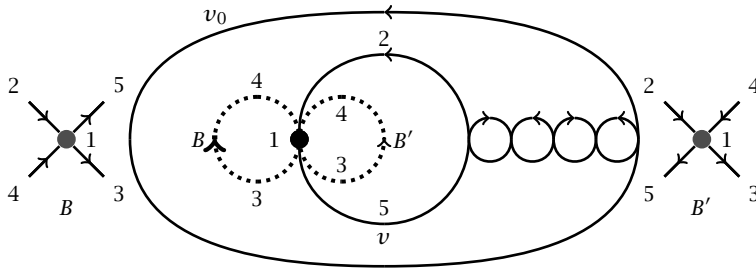


FIGURA 17: Correspondència entre l'orientació cíclica de les arestes cap a 2, 3, 4, 5 al voltant del punt de tall 1 en la representació de  $\omega$  i les immersions planes de  $S_v$ .

## 6 Girant la tercera cantonada

Hem vist que, tant si desfem el nus girant sempre cap a l'altra aresta en el mateix sentit com si girem sempre cap a l'aresta en sentit contrari, podem obtenir una caracterització dels codis de Gauss representables al pla.

Com a curiositat, fem notar que la figura 18 ja apareix en els treballs complets de Gauss, concretament a la pàgina 274 de [16], vuit pàgines abans

de la nota on es presenta el problema en detall i dues pàgines després de la primera menció que se'n fa. En aquesta figura apareixen els cercles de Seifert d'un nus; com hem vist, una estructura fonamental en teoria de nusos i que ens porta a la segona caracterització.

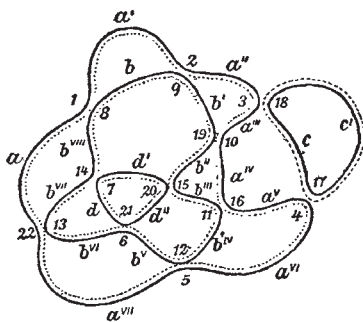


FIGURA 18: Cicles de Seifert en els treballs complets de Gauss. (Reprduit a [16].)

En particular, els cercles de Seifert representats a la figura 18 són els cercles de Seifert del codi de Gauss

$$\begin{aligned} & \{1, 8\}, \{2, 9\}, \{10, 19\}, \{11, 16\}, \{5, 12\}, \{13, 22\}, \{7, 14\}, \{13, 20\}, \\ & \{11, 16\}, \{4, 17\}, \{3, 18\}, \{10, 19\}, \{13, 20\}, \{6, 21\}, \{13, 21\}, \\ & \{1, 8\}, \{2, 9\}, \{3, 18\}, \{4, 17\}, \{5, 12\}, \{6, 21\}, \{7, 14\}. \end{aligned}$$

Així doncs, podem dir que la caracterització també es pot descobrir girant les pàgines de llibre de les obres completes de Gauss; en altres paraules, la resposta es trobava, materialment, en girar la cantonada!

## Referències

- [1] CAIRNS, G.; ELTON, D. M. «The planarity problem for signed Gauss words». *J. Knot Theory Ramifications*, 2 (4) (1993), 359-367.
- [2] CAIRNS, G.; ELTON, D. M. «The planarity problem. II». *J. Knot Theory Ramifications*, 5 (2) (1996), 137-144.
- [3] DE FRAYSSEIX, H. «Sur la représentation d'une suite à triples et à doubles occurrences par la suite des points d'intersection d'une courbe fermée du plan». A: *Problèmes combinatoires et théorie des graphes* (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976). París: CNRS, 1978, 161-165. (Colloq. Internat. CNRS; 260)
- [4] DE FRAYSSEIX, H.; OSSONA DE MENDEZ, P. «On a characterization of Gauss codes». *Discrete Comput. Geom.*, 22 (2) (1999), 287-295.

- [5] DEHN, M. «Über kombinatorische Topologie». *Acta Math.*, 67 (1) (1936), 123–168.
- [6] DIESTEL, R. *Graph Theory*. 3a ed. Berlín: Springer-Verlag, 2005. (Graduate Texts in Mathematics; 173)
- [7] DUNNINGTON, G. W. «The Gauss Archive and the Complete Edition of His Collected Works, 1860–1933». *Math. News Lett.*, 8 (5) (1934), 103–107.
- [8] EDMONDS, J. R. «A combinatorial representation for polyhedral surfaces». *Notices Amer. Math. Soc.*, 7 (1960), art. A646.
- [9] GAUSS, C. F. *Werke. Band I*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1863.
- [10] GAUSS, C. F. *Werke. Band II*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1863.
- [11] GAUSS, C. F. *Werke. Band III*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1866.
- [12] GAUSS, C. F. *Werke. Band IV*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1873.
- [13] GAUSS, C. F. *Werke. Band V*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1867.
- [14] GAUSS, C. F. *Werke. Band VI*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1874.
- [15] GAUSS, C. F. *Werke. Band VII*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1906.
- [16] GAUSS, C. F. *Werke. Band VIII*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1900.
- [17] GAUSS, C. F. *Werke. Band IX*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1903.
- [18] GAUSS, C. F. *Werke. Band X. Abt. I, II*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió dels originals de 1917 i de 1922–1933.
- [19] GAUSS, C. F. *Werke. Band XI. Abt. I, II*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió dels originals de 1927 i de 1924–1929.
- [20] GAUSS, C. F. *Werke. Band XII*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1973. Reimpressió de l'original de 1929.
- [21] GODSIL, C.; ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. Nova York: Springer-Verlag, 2001. (Graduate Texts in Mathematics; 207)
- [22] HOPCROFT, J.; TARJAN, R. «Algorithm 447: efficient algorithms for graph manipulation». *Comm. ACM*, 16 (6) (1973), 372–378.
- [23] HOPCROFT, J.; TARJAN, R. «Efficient planarity testing». *J. Assoc. Comput. Mach.*, 21 (1974), 549–568.
- [24] LINS, S.; OLIVEIRA-LIMA, E.; SILVA, V. «A homological solution for the Gauss code problem in arbitrary surfaces». *J. Combin. Theory Ser. B*, 98 (3) (2008), 506–515.

- [25] LINS, S.; RICHTER, B.; SHANK, H. «The Gauss code problem off the plane». *Aequationes Math.*, 33 (1) (1987), 81–95.
- [26] LOVÁSZ, L.; MARX, M. L. «A forbidden substructure characterization of Gauss codes». *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 38 (1-2) (1976), 115–119.
- [27] MARX, M. L. «The Gauss realizability problem». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22 (1969), 610–613.
- [28] NAGY, J. «Über ein topologisches Problem von Gauß». *Math. Z.*, 26 (1) (1927), 579–592.
- [29] READ, R. C.; ROSENSTIEHL, P. «On the Gauss crossing problem». A: *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976)*. Vol. II, Amsterdam; Nova York: North-Holland, 1978, 843–876. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; 18)
- [30] ROSENSTIEHL, P. «Les graphes d'entrelacement d'un graphe». A: *Problèmes combinatoires et théorie des graphes: Orsay 9-13 Juillet 1976*. Éditions du Centre national de la recherche scientifique, 1978, 359–362. (Colloq. Int. CNRS; 260)
- [31] ROSENSTIEHL, P. «A new proof of the Gauss interlace conjecture». *Adv. in Appl. Math.*, 23 (1) (1999), 3–13.
- [32] ROSENSTIEHL, P.; READ, R. C. «On the principal edge tripartition of a graph». A: *Advances in Graph Theory*. Amsterdam, Nova York, Oxford: North-Holland, 1978, 195–226. (Ann. Discrete Math.; 3)
- [33] ROSENSTIEHL, P.; TARJAN, R. E. «Gauss codes, planar Hamiltonian graphs, and stack-sortable permutations». *J. Algorithms*, 5 (3) (1984), 375–390.
- [34] SEIFERT, H. «Über das Geschlecht von Knoten». *Math. Ann.*, 110 (1) (1935), 571–592.
- [35] SEIFERT, H.; THRELFALL, W. *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig: Teubner, 1934.
- [36] TREYBIG, L. B. «A characterization of the double point structure of the projection of a polygonal knot in regular position». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 130 (1968), 223–247.
- [37] VAN LINT, J. H.; WILSON, R. M. *A Course in Combinatorics*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [38] VENA, LL. «A topological characterization of Gauss codes». Preprint, 2018. <https://arxiv.org/abs/1808.04630>.